La formule de Stirling

1) On commence par la présentation classique d'une épreuve de concours où on ne découvre pas le résultat :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. On veut montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite un réel strictement positif K. Pour cela, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$ puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

• On calcule w_n :

$$\begin{aligned}
w_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) - (n+1)\ln(n+1) + (n+1) - \frac{1}{2}\ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)\right) \\
&= \ln(n+1) - \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n)\right) + 1 = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

• On montre que la série numérique de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge :

$$\begin{aligned}
w_n &\underset{n \to +\infty}{=} 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc, la série numérique de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

• On en déduit la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:
On sait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la série de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$ sont de même nature. Donc, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{v_n}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel strictement positif $K = e^{\ell}$.

Puisque K n'est pas nul, on en déduit que

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Maintenant, on peut aussi écouvrir le résultat précédent patiemment à l'aide des règles de sommation des relations de comparaison. C'est ce qu'on fait dans le paragraphe 2).

2) a) Equivalent de $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a $\ln(k-1) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leqslant \ln k$. Puisque $\ln(k-1) \underset{k \to +\infty}{\sim} \ln k$ ou encore $\dfrac{\ln(k-1)}{\ln(k)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(k)} \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(x) \, dx \leqslant 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \underset{k \to +\infty}{\sim} \ln k > 0.$$

Comme la série de terme général $\ln k$ diverge, la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes permet d'affirmer que, quand n tend vers $+\infty$,

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx = \int_{1}^{n} \ln x \, dx = n\ln n - n + 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln n.$$

Donc,

$$\ln(n!) \underset{n \to +\infty}{=} n\ln n + o(n \ln n) \text{ ou encore } n! \underset{n \to +\infty}{=} n^n \times e^{o(n \ln n)}.$$

2) b) Equivalent de Ln(n !)-nLnn .

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \ln(n!) - n\ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n$.

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - ((n+1)\ln(n+1) - n\ln n) = -n(\ln(n+1) - \ln n) = -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1.$$

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes de signe constant à partir d'un certain rang, divergentes, on a :

$$u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1}(-1) = -(n-1),$$

ce qui fournit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - u_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$.

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + o(n) \text{ ou encore } n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \times e^{o(n)}.$$

2) c) Equivalent de Ln(n !)-nLnn+n .

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n + n$. Quand n tend vers $+\infty$

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - ((n+1)\ln(n+1) - n\ln n) + 1 = 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Donc, la série de terme général $\frac{1}{2n}$ étant divergente et $\frac{1}{2n}$ étant positif,

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n-1) \text{ (d'après l'étude de la série harmonique)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n).$$

Donc

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n) \text{ ou encore } n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \times e^{o(\ln n)}.$$

2) d) Convergence de la suite $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$. Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge et on sait qu'il en est de même de la suite (u_n).
Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Alors, $\ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ et donc,

$$\exists \ell \in \mathbb{R}/ \ \ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ell + o(1) \text{ ou encore, } \exists K \in]0,+\infty[/ \ n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n} \text{ (en posant } K = e^{\ell}).$$

3) Détermination de K et formule de Sirling.

L'étude des intégrales de Wallis (à savoir $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$, $n \in \mathbb{N}$) montre que

- d'une part, pour tout entier naturel n, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}$
- d'autre part, quand n tend vers $+\infty$, $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

D'après 4), on a alors

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{K\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{K^2 2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} = \frac{1}{K}\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

et donc $\dfrac{1}{K}\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ou encore $K = \sqrt{2\pi}$. On a ainsi montré que

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ (formule de STIRLING).}}$$

4) Equivalent de $\ln(n!) - n\ln n + n - \dfrac{1}{2}\ln n - \ln(\sqrt{2\pi})$**.**

D'après ce qui précède, si pour $n \geqslant 1$, $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \dfrac{1}{2}\ln n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ avec $\ell = \ln K = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Comme $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ln(\sqrt{2\pi}) = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$ puis, pour $n \geq 1$:

$$u_n - \ln(\sqrt{2\pi}) = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) - \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

La règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$u_n - \ln(\sqrt{2\pi}) = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{12n} \text{ (série télescopique).}$$

Donc

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ou encore

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).}$$

