Résumé du cours d'analyse

1 Topologie

1.1 Normes, normes équivalentes

Une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0 \text{ (positivité)} \\ \forall x \in E,\ (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0) \text{ (axiome de séparation)} \\ \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \text{ (homogénéité)} \\ \forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire).} \end{array}}$$

Normes équivalentes. Les normes N et N' sont équivalentes si et seulement si il existe deux réels **strictement** positifs α et β tel que $\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$. Il revient au même de dire que la fonction $\dfrac{N'}{N}$ est bornée inférieurement et supérieurement par des réels strictement positifs sur $E \setminus \{0\}$.

Théorème. Si E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, toutes les normes sont équivalentes.

1.2 Voisinage

Soit $x \in E$. Un voisinage de x est une partie de l'espace vectoriel normé (E, N) qui contient une boule ouverte non vide de centre x.
L'ensemble des voisinages de x se note $\mathscr{V}(x)$. Si V est une partie de E, $(V \in \mathscr{V}(X) \Leftrightarrow \exists r > 0/\ B_o(x, r) \subset V)$.

Théorème. Une réunion quelconque de voisinage de x est un voisinage de x. Une intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x.

1.3 Ouverts, intérieur.

Ouvert. Un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) est soit $\varnothing$, soit une partie non vide de E, voisinage de chacun de ses points. Si O est une partie non vide de E, (O est ouvert$\Leftrightarrow \forall x \in O,\ \exists r > 0/\ B_o(x, r) \subset O$).

Théorème. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Intérieur. Un élément x de $A \neq \varnothing$ est intérieur à A si et seulement si A est voisinage de x. $(\forall x \in E,\ (x \in \mathring{A} \Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x))$.
L'intérieur d'une partie non vide A est l'ensemble des points de A dont A est voisinage. Convention : $\mathring{\varnothing} = \varnothing$.

Théorème. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Théorème. A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

1.4 Fermés, adhérence

Fermé. A est fermé si et seulement si le complémentaire de A est ouvert.

Théorème. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une réunion finie de fermés est un fermé.

Théorème (caractérisation séquentielle des fermés). Une partie non vide A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A converge dans A.

Adhérence. Un élément x de E est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de x rencontre A
$\forall x \in E,\ (x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing)$. L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Théorème. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Théorème. A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Théorème. x est adhérent à $A \neq \varnothing$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergente de limite x.

$\varnothing$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

1.5 Compacts

Une partie non vide K de E est compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K. $\varnothing$ est compact par convention.

Théorème. Si K est compacte, K est fermée et bornée.

Théorème (de Borel-Lebesgue). Si (E, N) est un evn de dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass). Si (E, N) est un evn de dimension finie, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

2 Fonctions

2.1 Connexité par arcs

Définition. Soit A une partie non vide de E. A est connexe par arcs si et seulement si, pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe $\gamma\ :\ t \mapsto \gamma(t)$ définie et continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans E telle que

- $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$;
- $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in A$.

Théorème. Un convexe non vide est connexe par arcs.

2.2 Continuité

2.2.1 Continuité en général

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une application d'un evn (E, N) dans un evn (E', N'). Si f est continue sur E, l'image d'un connexe par arcs de E est un connexe par arcs de E'.
En particulier, si f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $D \subset \mathbb{R}$, l'image d'un intervalle contenu dans D par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème (images réciproques d'ouverts ou de fermé). f va d'une partie D d'un evn (E, N) vers un evn (E', N').
f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E', N') est un ouvert relatif de D, c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de E avec D.
f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de (E', N') est un fermé relatif de D, c'est-à-dire l'intersection d'un fermé de E avec D.

Théorème (image continue d'un compact). f va d'une partie D d'un evn (E, N) dans un evn (E', N'). Si f est continue sur D, l'image directe d'un compact de D est un compact de (E', N').
En particulier, si f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, l'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par f est un segment de $\mathbb{R}$.

2.2.2 Fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes

Définitions. Soit $f\ :\ D \subset (E, \|\ \|_E) \to (F, \|\ \|_F)$.
f est uniformément continue sur $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in D^2,\ (\|x - y\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon)$.
f est lipschitzienne sur $D \Leftrightarrow \exists k \geqslant 0/\ \forall (x, y) \in D^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E$.

Théorème. f lipschitzienne sur $D \Rightarrow f$ uniformément continue sur $D \Rightarrow f$ continue sur D (toutes les réciproques sont fausses).

Théorème de Heine. Si f est continue sur un compact, alors f est uniformément continue sur ce compact.

Théorème (continuité de la norme). L'application $N\ :\ \begin{array}{ccc} (E, N) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue.

Théorème (distance d'un point à une partie). Soit A une partie non vide de $(E, \|\ \|)$.
L'application $d_A\ :\ \begin{array}{ccc} (E, \|\ \|) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & \mathrm{Inf}\{\|x - a\|,\ a \in A\} \end{array}$ est définie et continue sur $(E, \|\ \|)$ car 1-lipschitzienne sur $(E, \|\ \|)$.

2.2.3 Continuité des applications linéaires

Théorème (continuité d'une application linéaire). f est une application linéaire de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$.
f est continue sur E si et seulement si f est continue en 0 si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+/\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ si et seulement si f est lipschitzienne sur $(E, \|\ \|_E)$. L'ensemble des applications continues sur $(E, \|\ \|_E)$ se note $\mathscr{L}_c(E, F)$.

Théorème. Pour $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, on pose $|||f||| = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$. $|||\ |||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E)$ appelée norme subordonnée aux normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$.
Pour tout $f \in \mathscr{L}_c(E)$, on a aussi $|||f||| = \text{Sup}\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E = 1\} = \text{Sup}\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E \leqslant 1\}$.
Pour tout $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant |||f||| \times \|x\|_E$. Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}_c(E, F) \times \mathscr{L}_c(F, G)$, $|||g \circ f||| \leqslant |||f||| \times |||g|||$.

Théorème. Si E est de dimension finie, toute application linéaire, forme linéaire, application multilinéaire ... est continue sur E.

Conséquence 1. Les sev d'un evn de dimension finie sont fermés.
Conséquence 2. Si $(E, \|\ \|)$ est un evn de dimension finie, il existe au moins une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{L}(E)$. Il existe au moins une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2.3 Dérivation

Théorème de Rolle. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ou les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. (contre-exemple : $x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$).

Théorème (de la limite de la dérivée). f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si f est continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b]$ et si f' a une limite réelle ou complexe en a, alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$ (énoncé analogue sur $[a, b[$ ou sur $[a, x_0[\cup]x_0, b]$ ou sur ...).

Formule de Taylor-Laplace. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}^p$, de classe C^{n+1} sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Inégalité des accroissements finis. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dérivable sur I. On suppose que $|f'|$ est majorée par le réel M sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

Inégalité de Taylor-Lagrange. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n + 1$ fois dérivable sur I. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par le réel M_{n+1} sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k \right| \leqslant \frac{M_{n+1}(b - a)^{(n+1)}}{(n + 1)!}.$$

2.4 Intégration

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout x_0 de I, la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

3 Sommations discrètes

3.1 Séries numériques ou vectorielles

L'étude de la convergence des séries ou de l'intégrabilité des fonctions nécessite : une bonne connaissance des fonctions de référence, une bonne maîtrise des équivalents, o, O, développements limités, théorèmes de croissances comparées.

Définition. Soit $(E, \|\ \|)$ un evn. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. La série de terme général u_n converge absolument si et seulement si la série de terme général $\|u_n\|$ converge.

Théorème. Si E est de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.

Règle de d'Alembert. (u_n) est une suite complexe, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang telle que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ a une limite $\ell \in [0, +\infty]$.
- Si $0 \leqslant \ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes, alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ converge et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.
Cec théorème est valable dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{M}_n(\mathbb{K}$, $\mathscr{L}(E)$ quand $\dim(E) < +\infty$.

Critère spécial aux séries alternées (ou théorème de Leibniz). Soit (u_n) une suite réelle alternée en signe, dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Alors, la série de terme général u_n converge.
De plus, S, S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et leur valeur absolue est majorée par la valeur absolue de leur premier terme.

Théorème (séries télescopiques). Soit (a_n) une suite complexe. La suite (a_n) et la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ sont de même nature.

C'est ce résultat qui est utilisé dans la plupart des cas pour calculer des sommes : $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ (somme télescopique) et si de plus (u_n) converge vers ℓ, $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0$ (série télescopique).

Comparaison séries-intégrales. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles positives, décroissante sur $[0, +\infty[$, la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\ dt - f(n)$ converge.
En particulier, la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Théorème (sommation des relations de comparaison). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles strictement **positives** telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Si la série de terme général a_n converge, alors la série de terme général b_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

(**règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes**).

Si la série de terme général a_n diverge, alors la série de terme général b_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} b_k$$

(**règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes**).

3.2 Familles sommables

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.
$(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\text{Sup}\left\{\sum_{i\in J} |u_i|,\ J \subset I,\ J \text{ fini}\right\} < +\infty\}$.

Théorème. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n est absolument convergente.

Théorème de sommation par paquets. (quand une famille est sommable, on a tous les droits).
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Soit $(J_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors,

- pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i\in J_j}$ est sommable,
- la famille $\left(\sum_{i\in J_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable,
- $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in J_j} u_i\right)$.

Un cas particulier de ce théorème est le théorème de Fubini pour les suites doubles :

Théorème de Fubini. Soit $(u_{i,j})$ une suite complexe double. Si pour tout i, la série de terme général $u_{i,j}$ est absolument convergente et que $\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right) < +\infty$, alors la suite $(u_{i,j})$ est sommable et de plus,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}u_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}u_{i,j}\right)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}u_{i,j}.$$

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

4.1.1 Convergence simple, uniforme

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f si et seulement si, pour chaque x de D, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur D si et seulement si la suite $(\|f-f_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Théorème. La convergence uniforme entraine la convergence simple.

4.1.2 Interversion des limites

Théorème d'interversion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini...).
Si chaque f_n a une limite ℓ_n (réelle, complexe) quand x tend vers a et si (f_n) converge uniformément vers f sur D, alors :
- f a une limite quand x tend vers a ;
- la suite (ℓ_n) converge ;
- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ell_n$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x))=\lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to a}f_n(x))$.)

4.1.3 Continuité.

Théorème. Si (f_n) converge uniformément vers f sur D et si chaque f_n est continue sur D, alors f est continue sur D (une limite uniforme de fonctions continues est continue)

4.1.4 Dérivation.

Théorème. Si
- (f_n) converge simplement vers f sur D ;
- chaque f_n est dérivable sur D ;
- la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur D (vers sa limite).

Alors, f est dérivable sur D et $f'=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'$ (c'est-à-dire $\dfrac{d}{dx}(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{d}{dx}f_n\right)$.)

Théorème (généralisation). Si
- (f_n) converge simplement vers f sur D,
- chaque f_n est de classe C^p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$ sur D,
- les suites des dérivées $\left(f_n^{(k)}\right)$, $1\leqslant k\leqslant p-1$, convergent toutes simplement sur D (vers leur limite),
- la suite $\left(f_n^{(p)}\right)$ converge uniformément sur D.

Alors, f est de classe C^p sur D et $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $f^{(k)}=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n^{(k)}$.

Dans la pratique, on montre la plupart du temps que les suites des dérivées $\left(f_n^{(k)}\right)$, $1\leqslant k\leqslant p$, convergent toutes uniformément sur D.

4.1.5 Intégration

Théorème (convergence uniforme sur un segment). Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors :
- f est continue par morceaux sur D ;
- la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ converge ;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ (c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$).

Théorème de convergence dominée. (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur I, la suite $\left(\int_I f_n\right)$ converge et $\int_I f(x)\ dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\ dx$.

4.2 Séries de fonctions

4.2.1 Convergence simple, uniforme, absolue, normale

La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D vers S si et seulement si, pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers $S(x)$.
La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D (vers S) si et seulement si la suite $(\|R_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (où $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$).
La série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D si et seulement si, pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument.
La série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D si et seulement si la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

Théorème. C.N. $\Rightarrow$ C.U.$\Rightarrow$ C.S. et C.N. $\Rightarrow$ C.A.$\Rightarrow$ C.S. (toute implication non écrite est fausse).

4.2.2 Interversion des limites

Théorème d'interversion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini...).
Si chaque f_n a une limite ℓ_n quand x tend vers a et si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers S sur D, alors :
- S a une limite quand x tend vers a ;
- la série numérique de terme général ℓ_n converge ;
- $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

4.2.3 Continuité

Théorème. Si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers S sur D et si chaque f_n est continue sur D, alors S est continue sur D.

4.2.4 Dérivation terme à terme

Théorème de dérivation terme à terme. Si
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D,
- chaque f_n est dérivable sur D,
- la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur D,

alors, S est dérivable sur D et $S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Théorème (généralisation). Si
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D,
- chaque f_n est de classe C^p sur D,
- les séries de termes généraux $f_n^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, convergent toutes simplement sur D,
- la série de terme général $f_n^{(p)}$ converge uniformément sur D,

alors, S est de classe C^p sur D et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $S^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Dans la pratique, la plupart du temps, on obtient la convergence de toutes les séries dérivées.

Revoir l'étude de la fonction ζ de Riemann : $\forall x > 1$, $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

4.2.5 Intégration terme à terme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment. Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et si la série de terme général f_n converge uniformément vers S sur $[a, b]$, alors :

- S est continue par morceaux sur $[a, b]$;
- la série de terme général $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ converge ;
- $\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque. Si chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur I, si la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$, alors S est intégrable sur I, la série de terme général $\int_I f_n$ converge et $\int_I S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions. Si chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur I, si la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I et si il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k\right| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors S est intégrable sur I, la série de terme général $\int_I f_n$ converge et $\int_I S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

5 Séries entières

5.1 Rayon de convergence

Soit $a = (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. $R_a = \sup\{r \in [0, +\infty[/ (|a_n| r^n) \text{ bornée}\}$. Les outils pour calculer des rayons de convergence sont :

Théorème. Si $|z| < R_a$, la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument et donc la série de terme général $a_n z^n$ converge et donc la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0 et donc la suite $(a_n z^n)$ est bornée.
Si $|z| > R_a$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et donc la suite $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0 et donc la série de terme général $a_n z^n$ diverge grossièrement.
En particulier, quand $R_a = +\infty$, la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème. Si pour tout $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_b \leqslant R_a$.

Théorème (règle de d'Alembert). Si la suite (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \ell \in [0, +\infty]$, alors $R_a = \dfrac{1}{\ell}$ (avec la convention $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$).

Théorème.
- $R_{a+b} \geqslant \text{Min}\{R_a, R_b\}$ et si de plus $R_a \neq R_b$, $R_{a+b} = \text{Min}\{R_a, R_b\}$.
- $R_{\lambda a} = R_a$ si $\lambda \neq 0$ et $+\infty$ si $\lambda = 0$. Dans tous les cas, $R_{\lambda a} \geqslant R_a$.
- $R_{\lambda a + \mu b} \geqslant \text{Min}\{R_a, R_b\}$.
- Si $c = a * b$ (produit de convolution) c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors $R_c \geqslant \text{Min}\{R_a, R_b\}$.

5.2 Opérations

- Pour tout z tel que $|z| < \text{Min}\{R_a, R_b\}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.
- Pour tout z tel que $|z| < R_a$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
- Pour tout z tel que $|z| < \text{Min}\{R_a, R_b\}$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ (produit de Cauchy de deux séries entières).

5.3 Convergence normale

Théorème. La série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n x^n$ (resp. $z \mapsto a_n z^n$) converge normalement sur tout $[-r, r]$ (resp. tout disque fermé de centre 0 et de rayon r) où $r < R_a$.

5.4 Continuité, dérivation.

Théorème. La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.
Idem pour primitive par intégration terme à terme. Les rayons de convergence de toutes les séries dérivées et toutes les séries primitives sont les mêmes.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R_a, R_a[,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

Théorème. Si pour tout $x \in]-R_a, R_a[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

5.4.1 Fonctions développables en série entière.

Définition. Soient $D \subset \mathbb{R}$ tel que $0 \in \overset{\circ}{D}$ puis $f\ :\ D \mapsto \mathbb{K}$. f est développable en série entière si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$, il existe $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de rayon $R_a \geqslant \varepsilon$ tels que, $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Si I est un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$ et pour tout x de I, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on dit que f est développable en série entière sur I.
Définition. Si f est développable en série entière sur I, f est de classe C^∞ sur I.
Réciproque fausse. Conte-exemple : $x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

6 Intégrales dépendant d'un paramètre

I est une partie de $\mathbb{R}$ et J est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
$f : \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$ est une fonction de deux variables, définie sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\text{Pour } x \in I, \text{ on pose } F(x) = \int_J f(x,t)\ dt.$$

Théorème de continuité d'une intégrale à paramètres. Si
- pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est définie et continue sur I.

Théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz)
Si pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J et **intégrable** sur I,
et si f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent, c'est-à-dire
- pour tout x de I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$.

Théorème de dérivation sous le signe somme généralisé

Si pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J et **intégrable** sur I, et si f admet des dérivées partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ jusqu'à l'ordre p, $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant +\infty$, vérifiant les hypothèses du théorème précédent, c'est-à-dire

- $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k} f(x,t)$ est continue sur I,
- $\forall k \in [\![1,p-1]\!]$, $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur J,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est de classe C^p sur I et pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in I,\ F(k)(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\ dt$.

Dans la pratique, la plupart du temps, on majore chaque $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|$, $k \in [\![1,p]\!]$, $(x,t) \in I \times J$, par $\varphi_k(t)$ où chaque φ_k est continue par morceaux, positive et intégrable sur J.

Revoir l'étude de la fonction Γ : $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$.

7 Equations différentielles

7.1 Le premier ordre

7.1.1 Théorèmes de Cauchy

Théorème de Cauchy linéaire : cas des équations différentielles scalaires du premier ordre. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ à savoir :

$$\forall x \in I,\ f(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\ dt \text{ où } A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\ dt.$$

Théorème de Cauchy linéaire : cas des systèmes du premier ordre à coefficients constants. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit B une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$ à savoir

$$\forall t \in I,\ X(t) = e^{tA}X_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-uA} B(u)\ du.$$

Théorème de Cauchy linéaire : cas général. Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$.

7.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

On note (E) l'équation $y' = ay + b$ et (E_h) l'équation homogène associée $y' = ay$. On note $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_h$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. (E_h)) sur I.

Théorème. Si a et b sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathscr{S}_h$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 et $\mathscr{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction $\mathscr{S}_h$.
Donc, $\mathscr{S}_h = \{\lambda f_0,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ et $\mathscr{S} = \{\lambda f_0 + f_1,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur I et f_1 est une solution particulière de (E) sur I.

On note (E) l'équation $X' = AX + B$ et (E_h) l'équation homogène associée $X' = AX$. On note $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_h$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. (E_h)) sur I.

Théorème. Si A et B sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_h$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction $\mathscr{S}_h$.

Définition. Une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathscr{S}_h$ s'appelle un système fondamental de solutions de (E_h) sur I.

7.1.3 Résolution de $y' = ay + b$

Pour résoudre $y' = ay + b$, on a la méthode de Lagrange. On note A une primitive de la fonction a sur I et x_0 un réel donné de I :

$$f' = af + b \Leftrightarrow f'e^{-A} - ae^{-A}f = be^{-A} \Leftrightarrow \left(e^{-A}f\right)' = be^{-A} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ e^{-A(x)}f(x) = C + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\ dt$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ f(x) = Ce^{A(x)} + e^{A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\ dt.$$

Si on devine ou on découvre une solution non nulle f_0 de (E_h) sur I, on dispose de la méthode de variation de la constante : il existe une solution particulière de la forme $f_1 = Cf_0$ où C est une fonction dérivable sur I.

7.1.4 « Résolution » de $X' = AX + B$

• Pour $X' = AX$, A constante quand t varie, si A est diagonalisable, les solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto c_1e^{\lambda_1 t}V_1 + \ldots + c_ne^{\lambda_n t}V_n$, $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$, où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la famille des valeurs propres de A et $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base (de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) de vecteurs propres associée.
• Pour $X' = AX + B$, A pas nécessairement constante. On suppose connu $(X_1, \ldots, X_n)$ système fondamental de solutions de (E) sur I. Il existe une solution particulière de (E) sur I de la forme $t \mapsto c_1(t)X_1(t) + \ldots + c_n(t)X_n(t)$ où $c_1, \ldots, c_n$, sont des fonctions dérivables sur I vérifiant $c_1'X_1 + \ldots c_n'X_n = B$ (méthode de variation des constantes).

7.2 Le second ordre

7.2.1 Théorème de Cauchy

Théorème de Cauchy linéaire : cas des équations différentielles scalaires du second ordre. Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

7.2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème. Si a, b et c sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathscr{S}_h$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction $\mathscr{S}_h$.
Donc, $\mathscr{S}_h = \left\{\lambda f_0 + \mu f_1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$ et $\mathscr{S} = \left\{\lambda f_0 + \mu f_1 + f_2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$ où (f_0, f_1) est une famille libre de solutions de (E_h) sur I et f_2 est une solution particulière de (E) sur I.

7.2.3 Résolution

On ne sait pas résoudre dans le cas général. Il faut découvrir par tous les moyens un système fondamental $(f_{0,1}\ )$ de (E_h) sur I. La plupart du temps, pour les équations proposées en maths spé, on commence à chercher un polynôme non nul, une exponentielle, une série entière non nulle ... solution de (E_h) sur I. On obtient une solution non nulle f_0 de $ay'' + by' + cy = 0$ sur I. On pose alors $y = f_0z$ (changement de fonction inconnue) et on trouve $\mathscr{S}_h$.

En ayant un système fondamental (f_0, f_1) de (E_h) sur I, pour trouver une solution particulière de (E) sur I, on dispose de la méthode de variation des constantes : il existe une solution particulière de (E) sur I de la forme $f_2 = \lambda f_0 + \mu f_1$ où λ et μ sont des fonctions deux fois dérivables sur I vérifiant $\left\{\begin{array}{l}\lambda'f_0 + \mu'f_1 = 0\\ \lambda'f_0' + \mu'f_1' = c\end{array}\right.$.

8 Fonctions de plusieurs variables

Presque impossible à résumer. On essaie quand même : on se place dans le cas particulier où f est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme quelconque notée $\|\ \|$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On donne donne quelques définitions, quelques formules et quelques théorèmes.

8.1 Dérivation à l'ordre 1

Définition. Soit $a \in \Omega$. f est différentiable en a si et seulement si il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et une fonction ε définie sur un voisinage de 0 telles que pour $h \in V$, $f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Théorème et définition. En cas d'existence, l'application L s'appelle la différentielle de f en a et se note df_a ou $df(a)$. $df_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Dans ce cas, on a

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + df_a(h) + o(h).$$

Théorème. Si f est différentiable en a, f admet une dérivée suivant tout vecteur. De plus, pour tout $v \in E\setminus\{0\}$, $D_v f(a) = df_a(v)$.

En particulier, en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la bse canonique de $\mathbb{R}^n$,

Théorème. Si f est différentiable en a, f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) = df_a\left(e_i\right).$$

On a donc

$$\forall a\,(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

puis

$$\forall a\,(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ df_a = \sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (fonction numérique), le gradient de f en a est $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ et on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Définition. Si f est différentiable en a, en notant f_1, ...,f_p, les composantes de f, la matrice jacobienne de f en a est $Jf(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant n} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ (en j-ème colonne, on dérive par rapport à la j-ème variable).

Théorème (règle de la chaine). $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g\ :\ \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.
$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$ et donc pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Par exemple, si $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$, cela donne mécaniquement : $\dfrac{\partial}{\partial x}(f(u,v)) = \dfrac{\partial u}{\partial x} \times \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \times \dfrac{\partial f}{\partial v}$.

8.2 Dérivation à un ordre supérieur

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ signifie $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ et f''_{x_i,x_j} signifie $\left(f'_{x_i}\right)'_{x_j}$.

Théorème (de Schwarz). Si f est de classe C^p sur Ω, alors pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, pour tout $(i_1, \ldots, i_k) \in [\![1,n]\!]^k$, pour toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(1)} \ldots \partial x_{\sigma(k)}}.$$

8.3 Extrema des fonctions numériques

Dans cette section, $f\ :\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction numérique.

Théorème. Si f est de classe C^1 sur Ω ouvert et si f admet un extremum local en $a \in \Omega$, alors $df_a = 0$ ou encore $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ ou encore $\nabla f(a) = 0$ ou encore a est un point critique de f.

Définition. Si f est de classe C^2 sur l'ouvert Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \Omega$, la matrice hessienne de f en a est $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. D'après le théorème de Schwarz, $H_f(a)$ est symétrique réelle.

Théorème. Si f est de classe C^2 sur Ω ouvert, si $a \in \Omega$ est tel que $df_a = 0$ et $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{--}(\mathbb{R})$), alors f a un minimum local (resp. maximum local) en a.

Dans le cas particulier des fonctions de deux variables, on pose $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Si f est de classe C^2 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $a \in \Omega$,

- Si (en a) $p = q = 0$, $\det(H_f) = rt - s^2 > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f) = r + t > 0$, f a un minimum local en a,
- Si (en a) $p = q = 0$, $\det(H_f) = rt - s^2 > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f) = r + t < 0$, f a un maximum local en a.