# Résumé du cours d'algèbre de Sup et Spé

## 1 Polynômes

### 1.1 Structure d'espace vectoriel

**Théorème.** $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. Une base est $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ (base canonique).
$(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. Une base est $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (base canonique).
$(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-espace algèbre de dimension infinie. $(\mathbb{K}_n[X], +, \times)$ est un anneau commutatif mais $(\mathbb{K}_n[X], +, ., \times)$ n'est pas une $\mathbb{K}$-algèbre.

### 1.2 Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall a \in \mathbb{K},\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k. \qquad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k.$$

Pour tout polynôme $P$ et tout entier naturel $k$, le coefficient de $X^k$ dans $P$ est $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

### 1.3 Racines d'un polynôme

#### 1.3.1 Racines

**Définition** $a$ est racine de $P$ si et seulement si $P(a) = 0$.

**Théorème.** Si $P \neq 0$, $a$ racine de $P$ si et seulement $P$ est divisible par $X - a$.

**Théorème.** Si $P \neq 0$, $P$ a un nombre de racines inférieur ou égal à son degré.
Un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ admettant au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes est nul.
Un polynôme ayant une infinité de racines est nul.
Deux polynômes qui coïncident en une infinité de valeurs sont égaux. On peut identifier les notions de fonctions polynômes et polynômes.

**Théorème de d'Alembert-Gauss.** Tout polynôme complexe de degré supérieur ou égal à $1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Tout polynôme complexe de degré supérieur ou égal à $1$ est scindé sur $\mathbb{C}$.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré $1$.

#### 1.3.2 Ordre de multiplicité d'une racine.

Pour $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$, $a$ est racine de $P$ d'ordre $k$ si et seulement si il existe un polynôme $Q$ tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $P$ est divisible par $(X-a)^k$ et pas par $(X-a)^{k+1}$). Une racine d'ordre $0$ n'est pas racine.
$a$ est racine de $P$ d'ordre au moins $k$ si et seulement si il existe un polynôme $Q$ tel que $P = (X-a)^k Q$ ($\Leftrightarrow$ $P$ est divisible par $(X-a)^k$).

**Théorème.** Le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)^k$ est $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i$.

**Théorème (caractérisation de l'ordre de multiplicité).**
$a$ est racine de $P$ d'ordre $k \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.
$a$ est racine de $P$ d'ordre au moins $k \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$.
**Théorème.** Si $a$ est racine d'ordre $p$ de $P \neq 0$, alors pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $a$ est racine d'ordre $p - k$ de $P^{(k)}$.

### 1.4 Structure d'anneau de $\mathbb{K}[X]$

**Théorème.** $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif et intègre.

**Définition.** Soit $I \subset \mathbb{K}[X]$. I est un idéal I de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ si et seulement si

1) $(I, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$ et 2) $\forall P \in I$, $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ \in I$.

**Définition.** Un idéal I de $\mathbb{K}[X]$ est principal $\Leftrightarrow$ il ext engendré par l'un de ses éléments c'est-à-dire si et seulement si il est de la forme $I = P\mathbb{K}[X] = \{PQ,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

**Théorème.** $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal, c'est-à-dire que tout idéal de cet anneau est principal.

## 1.5 PGCD, Bézout, Gauss

**Théorème et définition.** $A$ et $B$ sont deux polynômes non nuls. L'idéal engendré par $A$ et $B$ (c'est-à-dire le plus petit idéal contenant $A$ et $B$) est $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = \left\{AQ_1 + BQ_2,\ (Q_1, Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2\right\}$.
Le PGCD de $A$ et $B$ est l'unique polynôme unitaire $D$ tel que $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$. C'est un diviseur commun à $A$ et $B$ et tout diviseur commun à $A$ et $B$ divise $D$. Les diviseurs communs à $A$ et $B$ sont les diviseurs de leur PGCD.

**Théorème de Bézout.** Soient $A$ et $B$ deux polynômes non nuls. $A$ et $B$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes $U$ et $V$ tels que $AU + BV = 1$.
**Théorème.** Deux polynômes non nuls sont premiers entre eux si et seulement si ils sont sans racine commune dans $\mathbb{C}$.
**Théorème de Gauss.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois polynômes, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Si $A$ divise $BC$ et si $A$ est premier à $B$, alors $A$ divise $C$.

## 1.6 Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$. On pose : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_k = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k} z_{i_1} \ldots z_{i_k}$ et en particulier, $\sigma_1 = z_1 + \ldots + z_n$ et $\sigma_n = z_1 \ldots z_n$. Alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma_k = (-1)^{nk} \frac{a_{n-K}}{a_n} \text{ et en particulier, } \sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

# 2 Fractions rationnelles

**Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.** On suppose que $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \neq 0$, $P \wedge Q = 1$ et $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - z_i)^{\alpha_i}$ où les $z_i$ sont deux à deux distincts. $F$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right),$$

où $E$ est un polynôme et les $\lambda_{i,j}$ sont des nombres complexes.

$E$ est la partie entière de la fraction rationnelle $F$. $E$ est le quotient de la division euclidienne de $P$ par $Q$.
Si $z_i$ est un pôle simple ($\alpha_i = 1$), on peut poser $Q = (X - z_i)\, Q_1$ où $Q_1(z_i) \neq 0$. Le coefficient $\lambda$ de $\dfrac{1}{X - z_i}$ peut s'obtenir par deux méthodes : $\lambda = \displaystyle\lim_{z \to z_i} (z - z_i)\, F(z) = \frac{P(z_i)}{Q_1(z_i)}$ ou aussi $\lambda = \dfrac{P(z_i)}{Q'(z_i)}$.

# 3 Algèbre linéaire en général

## 3.1 Sous-espaces vectoriels

### 3.1.1 Caractérisation

$$\begin{aligned} F \text{ sev de } E &\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E \text{ et } 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F \\ &\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E \text{ et } 0_E \in F \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F \end{aligned}$$

Un sous-espace vectoriel $F$ est stable par combinaison linéaire : toute combinaison linéaire d'une famille de vecteurs de $F$ est un vecteur de $F$.

**Théorème.** Si $\dim(E) < +\infty$ et $F$ sev de $E$, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ et $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

 

### 3.1.2 Intersection et somme

**Théorème.** Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Une somme finie de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

**Remarque.** $F \cup G$ n'est pas un sev en général. $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$. $F \cup G$ sev $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

**Théorème.** Si $\dim(E) < +\infty$, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ (relation de Grassmann).

### 3.1.3 Sommes directes de deux ou plusieurs sous-espaces. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

La somme $F + G$ est directe $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ tout $x$ de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$
$\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \cap G = \{0\}$.

La somme $F_1 + \ldots + F_p$ est directe $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ tout $x$ de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$
où $x_1 \in F, \ldots x_p \in F_p$
$\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} \forall k \in [\![2, p]\!],\ F_k \cap \displaystyle\sum_{i<k} F_i = \{0\}$.

Si $\dim(E) < +\infty$, $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$ et de plus, $F + G$ est directe $\Leftrightarrow \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Si $\dim(E) < +\infty$, $\dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ et de plus, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ directe $\Leftrightarrow \dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

**Définition.** $F$ et $G$ sont supplémentaires $\Leftrightarrow E = F \oplus G \Leftrightarrow$ tout vecteur de $E$ est somme de manière unique d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$.

$F_1, \ldots, F_p$, sont supplémentaires $\Leftrightarrow E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p \Leftrightarrow$ tout vecteur $x$ de $E$ s'écrit de manière unique $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p$.

**Théorème.** Si $\dim(E) < +\infty$, $E = F \oplus G \Leftrightarrow$ 2 des 3 propositions suivantes sont vraies : 1) $F \cap G = \{0\}$, 2) $E = F + G$, 3) $\dim(E) = \dim(F) + \dim G$.

### 3.1.4 Combinaisons linéaires et sous-espace engendré par une famille ou une partie de $E$. Familles génératrices

Une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est un vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$.

Plus généralement, une combinaison linéaires de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est un vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est à support fini.

Le sous-espace engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$, noté $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.
Le sous-espace engendré par $X$ est aussi le plus petit sev contenant $X$ ou encore l'intersection de tous les sev contenant $X$.

**Définition.** $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de $E$ si et seulement si $E = \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$ si et seulement si tout vecteur de $E$ est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

**Les différentes techniques permettant de montrer qu'un sous-ensemble $F$ de $E$ est un sev de $E$.**
- Montrer que $F$ contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires ($\overrightarrow{0_E} \in F$ et $\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y} \in F$).
- Montrer que $F$ est l'intersection ou la somme de plusieurs sev ($F = G \cap H$ ou $F = G + H$).
- Montrer que $F$ est l'espace engendré par une certaine famille de vecteurs ($F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i \in I}$).
- Montrer que $F$ est le noyau d'une application linéaire.
- Montrer que $F$ est l'orthogonal d'une partie $A$ de $E$ pour un certain produit scalaire ($F = A^{\perp}$).

### 3.1.5 Familles libres. Bases

**Définition d'une famille libre.** $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre $\Leftrightarrow \forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0\right)$.

$(x_i)_{i \in I}$ est libre $\Leftrightarrow \forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini, $\left(\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0\right)$.

$(x_i)_{i\in I}$ est liée $\Leftrightarrow \exists(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini et les $\lambda_i$ non tous nuls telle que $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$.

Une famille infinie est libre si et seulement si toute sous famille finie est libre. Une famille infinie est liée si et seulement si il existe une sous famille finie liée.

Erreur classique : si les vecteurs de la famille sont deux à deux non colinéaires, la famille n'est pas nécessairement libre (penser à trois vecteurs deux à deux non colinéaires dans un même plan vectoriel). La phrase « les vecteurs sont deux à deux non colinéaires et donc la famille est libre » est totalement fausse.

**Définition d'une base.** $B = (x_i)_{i\in I}$ base de $E \Leftrightarrow$ tout $x$ de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $x_i \Leftrightarrow B$ est libre et génératrice $\Leftrightarrow \forall x \in E$, $\exists!\ (\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

Si $x = \displaystyle\sum_{i in I} \lambda_i x_i$, $(\lambda_i)_{i\in I}$ sont les coordonnées de $x$ dans la base $B = (x_i)_{i\in I}$.

**Les différentes techniques permettant de montrer qu'une famille de vecteurs est une base de $E$ ou simplement une famille libre.**
• En dimension quelconque, $B$ est une base si $B$ est libre et génératrice.
• En dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ (la dimension est donc supposée connue), si une famille $B$ est libre de cardinal $n$, alors $B$ est une base de $E$ et si $B$ est génératrice de $E$ de cardinal $n$, alors $B$ est une base.
• Si $E$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, si $B_0$ est une base connue de $E$ et si $B$ est une famille de $n$ vecteurs, alors $B$ est une base de $E$ si et seulement si $\det_{B_0}(B) \neq 0$ (souvent le plus efficace).
• Si $\mathscr{F}$ est une famille de $p$ vecteurs, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si le rang $r$ de $\mathscr{F}$ est égal au cardinal $p$ de la famille. Si de plus $\dim(E) = n$, $\mathscr{F}$ est une base de $E$ si et seulement si $r = p = n$.
• Si $B$ est une famille d'un espace $E'$ qui est l'image d'une base $B_0$ de $E$ par un isomorphisme, alors $B$ est une base de $E'$.
• Si $E$ est muni d'un produit scalaire, une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre et en particulier une famille orthonormale est libre.

### 3.1.6 Rang d'une famille de vecteurs.

**Définition.** $\text{rg}\,(x_i)_{i\in I} = \dim\left(\text{Vect}\,(x_i)_{i\in I}\right)$.

**Théorème.** $\text{rg}\,(x_i)_{i\in I}$ est le cardinal d'une sous-famille libre maximale extraite de $(x_i)_{i\in I}$.

**Théorème.** Si $n = \dim(E)$, $p = \text{card}\,(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, $r = \text{rg}\,(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$,
- $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre $\Leftrightarrow r = p$,
- $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow r = n$,
- $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ base de $E \Leftrightarrow r = p = n$.

**Transformations ne modifiant pas le rang car ne modifiant pas le sous-espace engendré.** $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.
- permuter les vecteurs de $X$,
- multiplier un vecteur de $X$ par $\lambda \neq 0$,
- ajouter à un vecteur de $X$ une combinaison linéaire des autres vecteurs de $X$,
- supprimer un vecteur nul ou plus généralement supprimer un vecteur de $X$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de $X$.

## 3.2 Applications linéaires

### 3.2.1 Définition d'une application linéaire.

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev et $f$ une application de $E$ dans $F$.

$$\begin{aligned} f \text{ linéaire} &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

### 3.2.2 Images directes et réciproques.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. L'image directe d'un sous-espace de $E$ est un sous-espace de $F$. L'image réciproque d'un sous-espace de $F$ est un sous-espace de $E$.

En particulier, $\text{Ker}f = \{x \in E/\ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace de $E$ et $\text{Im}f = \{f(x)/\ x \in E\} = f(E)$ est un sous espace de $F$.
**Théorème.** ($f$ injective $\Leftrightarrow \text{Ker}f = \{0\}$), ($f$ surjective $\Leftrightarrow \text{Im}f = F$) ($f$ bijective $\text{Ker}f = \{0\}$ et $\text{Im}f = F$).

 

**Théorème.** Soit $f$ linéaire de $E$ vers $F$. Si $X$ est génératrice de $E$, $f(X)$ est génératrice de $\text{Im}f = f(E)$ et en particulier si $f$ est surjective, $f(X)$ est génératrice de $F$.
Si de plus, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f\left(e_i\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

**Théorème.** Si $f$ est linéaire et $X$ est liée alors $f(X)$ est liée. Si $f(X)$ est libre, $X$ est libre.
Si $f$ est injective et $X$ est libre dans $E$ alors $f(X)$ est libre dans $F$.

**Théorème.** $f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$ si et seulement si l'image par $f$ d'une base de $E$ est une base de $F$.

Détermination sur une base : soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de $E$, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par les $f(e_i)$ et en particulier deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales ou une application linéaire qui s'annule sur une base est nécessairement l'application nulle.

### 3.2.3 Rang d'une application linéaire

**Définition.** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

**Théorème du rang.** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec $\dim(E) < +\infty$.
La restriction de $f$ à un supplémentaire $S$ de $\text{Ker}(f)$ dans $E$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\text{Im}(f)$.
En particulier, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))$.

**Théorème.** Si $\dim E = \dim F < +\infty$ et $f \in \mathscr{L}(E, F))$ alors ($f$ est injective $\Leftrightarrow$ $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $f$ est bijective).

**Théorème.** Si $n = \dim E < +\infty$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

| | | |
|---|---|---|
| 1) $f$ bijective | 2) $\det(f) \neq 0$ | 3) $f$ injective |
| 4) $f$ surjective | 5) $\text{Ker}f = \{0\}$ | 6) $\text{Im}f = E$ |
| 7) $\text{rg}f = n$ | 8) $f$ inversible à droite pour $\circ$ | 9) $f$ inversible à gauche pour $\circ$ |
| 10) $f$ simplifiable à droite pour $\circ$ | 11) $f$ simplifiable à gauche pour $\circ$ | |

### 3.2.4 Projections et symétries

$E = F + G$. $p$ =projection sur $F$ parallèlement à $G$, $q$ =projection sur $G$ parallèlement à $F$, $s$ =symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.
• Pour tout $(y, z) \in F \times G$ puis $x = y + z$, $p(x) = y$ et $q(x) = z$.
• $p \in \mathscr{L}(E)$, $p^2 = p$, $p + q = \text{Id}_E$, $pq = qp = 0$.
• $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}\left(\text{Id}_E - p\right)$ et $G = \text{Ker}(p) = \text{Im}\left(\text{Id}_E - p\right)$.
• $p$ est diagonalisable. Si de plus, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, alors $\text{Mat}_{\mathscr{B}} = \text{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\dim(F)}, 0, \ldots, 0)$. En particulier, la trace d'une projection est son rang.

• $s = 2p - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2q$ ou $p = \dfrac{1}{2}\left(\text{Id}_E + s\right)$, $q = \dfrac{1}{2}\left(\text{Id}_E - s\right)$.
• $F = \text{Ker}\left(s - \text{Id}_E\right)$ et $G = \text{Ker}\left(s + \text{Id}_E\right)$.
• $p$ est diagonalisable. Si de plus, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, alors $\text{Mat}_{\mathscr{B}} = \text{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\dim(F)}, -1, \ldots, -1)$.

**Théorème.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $p$ est une projection $\Leftrightarrow p^2 = p$ et $s$ est une symétrie $\Leftrightarrow s^2 = \text{Id}_E$.

### 3.2.5 Dimensions usuelles.

• $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ et plus généralement $\dim(E_1 \times \ldots \times E_p) = \dim\left(E_1\right) + \ldots + \dim\left(E_p\right)$.
• $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ et plus généralement $\dim(F_1 \oplus \ldots \oplus F_p) = \dim\left(F_1\right) + \ldots + \dim\left(F_p\right)$.
• $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = (\dim E) \times (\dim F)$. Donc $\dim(\mathscr{L}(E)) = (\dim E)^2$.
• $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

## 3.3 Matrices

### 3.3.1 Opérations.

**Addition de deux matrices.** $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.
**Multiplication par un scalaire.** $\lambda(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.
**Produit.** $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} \times (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant q}$.

**Théorème.** $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $np$ et en particulier $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n^2$.

La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont le coefficient ligne $k$, colonne $l$ vaut $1$ si $(k,l)=(i,j)$ et $0$ sinon. Une écriture abrégée de son terme général est $\delta_{k,i}\times\delta_{l,j}$.

**Théorème.** $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau, non commutatif pour $n\geqslant 2$. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non commutative pour $n\geqslant 2$.
L'ensemble des matrices inversibles pour $\times$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$. $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe, non commutatif pour $n\geqslant 2$.

**Produit de deux matrices élémentaires.**
Soient $E_{i,j}$ une matrice élémentaire de format $(n,p)$ et $E_{k,l}$ de format $(p,q)$ alors

$$E_{i,j}\times E_{k,l}=\delta_{j,k}E_{i,l}.$$

Dangers principaux :

- On peut avoir $AB=0$ sans que ni $A$, ni $B$ ne soient nuls : $AB=0\not\Rightarrow A=0$ ou $B=0$.
- Plus généralement, l'égalité $AB=AC$ n'entraîne pas en général $B=C$ mais si $A$ est carrée et inversible, $A$ est simplifiable.
- $AB=0\not\Rightarrow BA=0$.
- Les identités $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ et plus généralement le binôme de Newton, et aussi $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ ne sont vraies que si $A$ et $B$ commutent.
- La somme de 2 matrices inversibles n'est en général pas inversible.

**Théorème.** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) $A$ est inversible    2) $\det A\neq 0$    3) $A$ est inversible à gauche
4) $A$ est inversible à droite    5) $A$ est simplifiable à gauche    6) $A$ est simplifiable à droite
7) $\text{rg}A=n$    8) $\text{Ker}A=\{0\}$    9) $\text{Im}A=M_{n,1}(\mathbb{K})$
10) Pour tout vecteur colonne $B$, le système $AX=B$ admet une unique solution où $X$ est un vecteur colonne inconnu.

(Ker$A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes $X$ tels que $AX=0$ et Im$A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes de la forme $AX$ où $X$ est un vecteur colonne quelconque.)

**Remarque.** $AB=0\not\Rightarrow BA=0$ mais $AB=I_n\Rightarrow BA=I_n$.

### 3.3.2 Transposition.

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de format $(n,p)$. La transposée de $A$ notée $A^T$ est la matrice de format $(p,n)$ dont le coefficient ligne $i$, colonne $j$, vaut $a_{j,i}$.

**Théorème.** $\left(A^T\right)^T=A$, $(A+B)^T=A^T+B^T$, $(\lambda A)^T=\lambda A^T$. La transposition est un isomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ sur l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}),+,.)$.

**Théorème.** $(AB)^T=B^TA^T$. Si de plus $A$ est carrée, $A$ est inversible si et seulement si $A^T$ l'est et dans ce cas, $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

Les matrices carrées $A$ telles que ${}^tA=A$ sont les matrices symétriques. Leur ensemble est noté $S_n(\mathbb{K})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique si et seulement si pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=a_{j,i}$.
Les matrices $A$ telles que ${}^tA=-A$ sont les matrices antisymétriques. Leur ensemble est noté $A_n(\mathbb{K})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est anti-symétrique si et seulement si pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=-a_{j,i}$. Ceci impose en particulier $\forall\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,i}=0$.

**Théorème.** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})=S_n(\mathbb{K})\oplus A_n(\mathbb{K})$. $\dim S_n(\mathbb{K})=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n(\mathbb{K})=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

### 3.3.3 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base donnée de $E$.
Soit $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ est la matrice de format $(n,p)$ dont le coefficient ligne $i$, colonne $j$, vaut la $i$-ème coordonnée de $x_j$ dans $\mathscr{B}$. $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}=\left(e_i^*(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

### 3.3.4 Matrice d'une application linéaire

**Définition.** Soient $E$ et $F$ des espaces de dimensions respectives $n$ et $p$ et $f$ un élément de $\mathscr{L}(E,F)$.
Soient $\mathscr{B}=(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de $E$ et $\mathscr{B}'=(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de $F$.
$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)=\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))=\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_j))_{1\leqslant j\leqslant n}=\left(e_i'^*(f(e_j)\right)_{1\leqslant i\leqslant p\ 1\leqslant j\leqslant n}$.

 

**Théorème.** Soient $x \in E$ puis $y = f(x) \in F$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur $x$ dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur $y$ dans la base $\mathscr{B}'$.
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice de $f$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Alors $Y = AX$.

**Théorème.** Deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $E$ et $F$ respectivement étant fixées, l'application qui à $f \in \mathscr{L}(E, F)$ associe sa matrice relativement à ces bases est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E, F)$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

**Théorème.** • $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.
• Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = (\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^n$.
• $f$ bijective de $E$ sur $E'$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est inversible et dans ce cas, $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(f^{-1}\right) = (\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))^{-1}$
• Si $f \in GL(E)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = (\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^n$.

### 3.3.5 Changement de bases

**Définition.** Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$ ($\dim(E) < +\infty$). La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

**Théorème.** Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$ et soit $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soient $x$ un vecteur de $E$ puis $X$ (resp. $X'$) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $x$ dans $\mathscr{B}$ (resp. dans $\mathscr{B}'$) alors $X = PX'$.

**Théorème.** Soient $E$ un espace de dimension $n$ muni de deux bases $b$ et $b'$ et $P$ la matrice de passage de $b$ à $b'$.
Soient $F$ un espace de dimension $p$ muni de deux bases $\beta$ et $\beta'$ et $Q$ la matrice de passage de $\beta$ à $\beta'$.
Soit $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$.
Soit $A$ (resp. $B$) la matrice de $f$ relativement aux bases $b$ et $\beta$ (resp. $b'$ et $\beta'$). Alors

$$B = Q^{-1}AP.$$

**Théorème.** Soient $E$ un espace de dimension $n$ muni de deux bases $b$ et $b'$ et $P$ la matrice de passage de $b$ à $b'$.
Soit $f$ un endomorphisme de $E$ de matrice $A$ dans $b$ et $B$ dans $b'$. Alors $B = P^{-1}AP$.

### 3.3.6 Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ une matrice de format $(n, p)$. Les lignes de $A$ seront notées $L_1$,..., $L_n$ et les colonnes de $A$ seront notées $C_1$,..., $C_p$.

**Définition.** Le rang de $A$ est la dimension du sous-espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par la famille des vecteurs colonnes de $A$.

**Théorème.** $\text{rg}A \leqslant \text{Min}\{n, p\}$.

**Théorème.** Soit $\mathscr{F}$ une famille de $p$ vecteurs d'un espace $E$ de dimension $n$ telle que $A$ soit la matrice de $\mathscr{F}$ dans une certaine base de $E$ alors $\text{rg}A = \text{rg}\mathscr{F}$.

**Théorème.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $\mathscr{B}$ une base de $E$ et $\mathscr{B}'$ une base de $F$.
Soit $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$ de matrice $A$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ alors $\text{rg}A = \text{rg}f$.

**Théorème.** Une matrice carrée de format $n$ est inversible si et seulement si son rang est $n$.

**Théorème.** $\text{rg}(AB) \leqslant \text{Min}\{\text{rg}A, \text{rg}B\}$ et $\text{rg}(A + B) \leqslant \text{rg}A + \text{rg}B$.
**Théorème.** Soit $A$ une matrice de format $(n, p)$. Soit $P$ une matrice carrée inversible de format n et $Q$ une matrice carrée inversible de format $p$ alors $\text{rg}(PA) = \text{rg}A$ et $\text{rg}(AQ) = \text{rg}A$.

**Théorème.** Le rang de $A$ est le format maximum d'une matrice carrée extraite de $A$ et inversible.

**Opérations élémentaires.** On utilise les trois opérations élémentaires sur les colonnes ou sur les lignes suivantes :
1) Echange de deux colonnes (resp.de deux lignes) . Codage : $C_i \leftrightarrow C_j$ (resp. $L_i \leftrightarrow L_j$) avec $i \neq j$.
2) Multiplication d'une colonne (resp. d'une ligne) par $\lambda$ scalaire non nul. Codage : $C_j \leftarrow \lambda C_j$. (resp. $L_i \leftarrow \lambda L_i$).
3) Ajout de la colonne (resp.ligne) $j$ à la colonne (resp.ligne) $i$ avec $i \neq j$. Codage : $C_i \leftarrow C_i + C_j$ (resp. $L_i \leftarrow L_i + L_j$)

On peut ajouter à ces opérations élémentaires deux opérations moins élémentaires obtenues en combinant les transformations précédentes.
1) permutation des colonnes (resp. des lignes)
2) ajout à une colonne (resp. ligne) d'une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes))

**Théorème.** Les transformations précédentes ne modifient pas le rang.

 

### 3.3.7 Matrices équivalentes, matrices semblables.

**Définition.** Soient $A$ et $B$ deux matrices rectangulaires (éventuellement carrées) de format $(n, p)$.
$A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si il existe $P$ matrice carrée inversible de format $n$ et $Q$ matrice carrée inversible de format $p$ telles que $B = QAP$.
Deux matrices $A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire relativement à deux couples de bases comme décrit en 3).

**Théorème.** $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang $r$ si et seulement si $A$ est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deux matrices sont équivalentes $\Leftrightarrow$ ces deux matrices ont même rang.

**Définition.** Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de format $n$. $A$ et $B$ sont semblables si et seulement si il existe $P$ matrice carrée inversible de format $n$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Deux matrices $A$ et $B$ sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à deux bases.
Deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse en général ne serait-ce que parce que deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement carrées.
Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, mêmes propriétés de calculs .... (toute réciproque fausse).

**Trace d'une matrice carrée et trace d'un endomorphisme**

**Définition.** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée. La trace de $A$ est le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

**Théorème.** La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}2$, $\forall(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr} A + \mu \text{Tr} B$.

**Théorème.** $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}\left(A^T\right) = \text{Tr} A$.

**Théorème.** $\forall(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

**Théorème.** Deux matrices semblables ont même trace.

**Danger.** $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA) \neq \text{Tr}(ACB)$ en général. Par exemple, $\text{Tr}(E_{1,1} \times E_{1,2} \times E_{2,1}) = \text{Tr}(E_{1,1}) = 1$ et $\text{Tr}(E_{1,1} \times E_{2,1} \times E_{1,2}) = \text{Tr}(0) = 0$.

**Définition.** La trace d'un endomorphisme $f$ d'un espace $E$ de dimension $n$ est la trace de sa matrice dans une base donnée de $E$ (ne dépend pas du choix de la base puisque deux matrices semblables ont mêmes traces).

# 4 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

## 4.1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

**Valeurs propres.** $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } f \quad & \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\} / \ f(x) = \lambda x \\ & \Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}_E \text{ non injectif} \\ & \Leftrightarrow \text{Ker}\,(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Si de plus $E$ est de dimension finie,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } f \quad & \Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}_E \notin GL(E) \\ & \Leftrightarrow \det\,(\lambda \text{Id}_E - f) = 0. \end{aligned}$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A \quad & \Leftrightarrow \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K} \setminus \{0\} / \ AX = \lambda X \\ & \Leftrightarrow \text{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ & \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K}) \\ & \Leftrightarrow \text{rg}\,(A - \lambda I_n) < n \\ & \Leftrightarrow \det\,(\lambda I_n - A) = 0. \end{aligned}$$

En particulier, $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de $A$. Si $\dim(E) < +\infty$, $f \in GL(E) \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de $f$.

Si $E$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, tout endomorphisme de $E$ admet au moins une valeur propre. Toute matrice carrée admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

**Vecteurs propres.** $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$.
$x$ est un vecteur propre de $f$ si et seulement si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \ f(x) = \lambda x$.

 

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$X$ est un vecteur propre de $A$ si et seulement si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K} /\ AX = \lambda X$.

**Sous-espaces propres.** Si $\lambda$ est valeur propre de $f$, le sous-espace propre associé à $\lambda$ est $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_E)$.
Ce sous-espace propre est constitué de $0$ et des vecteurs propres associés à $\lambda$.
Si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$, alors $E_\lambda = \{0\}$ et dans ce cas, $E_\lambda$ n'est pas un sous-espace propre de $f$.
Définition analogue pour une matrice.

**Théorème.** Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

**Théorème.** La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres est directe.

## 4.2 Sous-espaces stables

**Définition.** Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $F$ sev de $E$. $F$ est stable par $f \Leftrightarrow \forall x \in F,\ f(x) \in F \Leftrightarrow f(F) \subset F$.
Dans ce cas, la restriction de $f$ à $F$ induit un endomorphisme de $F$.
Les droites stables par $f$ sont les droites engendrées par un vecteur propre.
Les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $f$. La restriction de $f$ à $E_\lambda$ « est » l'homothétie de rapport $\lambda$.

**Théorème.** Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, $g$ laisse stable $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et les sous-espaces propres de $f$.

## 4.3 Polynôme caractéristique

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathscr{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de $f$ est $\chi_f = \det\,(XId_E - f)$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A = \det\,(XI_n - A)$.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.
Le spectre de $A$ (de $f$) peut désigner l'**ensemble** des valeurs propres, chaque valeur propre n'étant alors écrite qu'une fois, ou la **famille** des valeurs propres, chaque valeur propre étant alors écrite un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

**Degré, coefficient dominant.** Si $A$ est de format $n$ (resp. $E$ est de dimension $n$), $\chi_A$ (resp. $\chi_f$) est de degré $n$, unitaire.

**Coefficients du polynôme caractéristique.** Le coefficient de $X^{n-1}$ est $-\mathrm{Tr}(A)$ (resp. $-\mathrm{Tr}(f)$) et le coefficient de $X^0$ est $(-1)^n \det(A)$ (resp. $(-1)^n \det(f)$). Le coefficient de $X^k$ est $(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où $\sigma_k = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la famille des valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{C}$, alors $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ et $\det(A) = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$.

**Théorème.** Si $\lambda$ est valeur propre de $A$ (de $f$) d'ordre $o(\lambda)$, alors $1 \leqslant \dim\,(E_\lambda) \leqslant o(\lambda)$ et aussi $o(\lambda) \geqslant \dim\,(E_\lambda)$.
Si $\lambda$ est valeur propre simple, $\dim\,(E_\lambda) = 1$. Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est une droite.

**Théorème.** $A$ et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique et en particulier même trace et même déterminant.
**Théorème.** $AB$ et $BA$ (resp. $f \circ g$ et $g \circ f$) ont même polynôme caractéristique et en particulier même trace et même déterminant.
**Théorème.** Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et en particulier même trace et même déterminant.
Réciproque fausse pour $n \geqslant 2$. Par exemple, $I_n$ et $I_n + E_{1,2}$ ont même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables.

## 4.4 Diagonalisation

**Définition.** Un endomorphisme de $E$ (de dimension non nulle quelconque) est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.
Si de plus, $E$ est de dimension finie, $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}$, $\exists D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) /\ A = PDP^{-1}$.

**Théorème.** $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $n_i$ la dimension de $E_{\lambda_i}(f)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est diagonalisable } &\Leftrightarrow \text{les sous-espaces propres de } f \text{ sont supplémentaires} \\ &\Leftrightarrow n = \sum n_i \\ &\Leftrightarrow \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ \dim\,(E_\lambda) = o(\lambda). \end{aligned}$$

**Théorème.** $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. **Si** $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples (ou encore si $f$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes), **alors** $f$ est diagonalisable. Dans ce cas, les sous-espaces propres sont des droites.
Réciproque fausse.

## 4.5 Trigonalisation

**Définition.** Un endomorphisme de $E$ (de dimension finie non nulle) est trigonalisable si et seulement si il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est triangulaire.
Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si cette matrice est semblable à une matrice triangulaire.

**Théorème.** Si $E$ est de dimension finie non nulle sur $\mathbb{K}$, $f$ est trigonalisable si et seulement si $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle est trigonalisable.
Toute matrice carrée est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

**Conséquences.** Si $\mathrm{Sp}(f) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Sp}\left(f^k\right) = \left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right)$ et plus généralement, pour tout polynôme $P$, $\mathrm{Sp}(P(f)) = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$. Si de plus $f$ est inversible, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Sp}\left(f^k\right) = \left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right)$.

## 4.6 Polynômes d'endomrophismes

### 4.6.1 Commutant

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). Le commutant de $f$ (resp. de $A$) est $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E)/\ g \circ f = f \circ g\}$ (resp. $C(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})/\ AB = BA\}$.

**Théorème.** $C(f)$ (resp. $C(A)$) est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ (resp. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.
Danger. Deux éléments $g$ et $h$ de $C(f)$ commutent avec $f$ mais ne commutent pas nécessairement entre eux.

### 4.6.2 $\mathbb{K}[f]$ ou $\mathbb{K}[A]$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$ (resp. ...) est un morphisme d'algèbres. L'image de ce morphisme est $\mathbb{K}[f]$ resp. $\mathbb{K}[A]$). $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative (deux polynômes en $f$ commutent) de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.
En particulier, tout polynôme en $f$ commute avec $f$ et donc $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative $(C(f), +, ., \circ)$.

### 4.6.3 Polynômes annulateurs, polynôme minimal

Le noyau de $\Phi$ est l'ensemble des polynômes annotateurs de $f$ (resp. de $A$). C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathbb{K}[X], +, .)$ et un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Si $E$ est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ grâce au :

**Théorème de Cayley-Hamilton.** $\chi_f(f) = 0$.

Si $E$ est de dimension finie, le générateur unitaire de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est le **polynôme minimal** $\mu_f$ de $f$.
Par définition, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mu_f \mathbb{K}[X]$ ou encore les polynômes annulateurs de $f$ sont les multiples de $\mu_f$. Le théorème de Cayley-Hamilton se réénonce sous la forme :

**Théorème.** $\mu_f$ divise $\chi_f$.

**Théorème (polynômes annulateurs et valeurs propres).** Si $P(f) = 0$ et si $\lambda$ est valeur propre de $f$, alors $P(\lambda) = 0$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice) sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement valeur propre mais toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur.

**Théorème.** Toute valeur propre de $f$ est racine de $\mu_f$ et toute racine de $\mu_f$ est valeur propre de $f$. Si $\chi_f = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors $\mu_f$ est de la forme $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ où $\forall i$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

**Théorème de décomposition des noyaux.** Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_k$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors,

$$\mathrm{Ker}\left((P_1 \times \dots \times P_k)(f)\right) = \mathrm{Ker}\left(P_1(f)\right) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\left(P_k(f)\right).$$

En particulier, si $P = P_1 \times \dots \times P_k$ est un polynôme annulateur de $f$, alors

$$E = \mathrm{Ker}\left(P_1(f)\right) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\left(P_k(f)\right).$$

 

### 4.6.4 Décomposition de $E$ en somme de sous-espaces stables supplémentaires

Si $E$ est de dimension finie non nulle et $\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (f - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors

$$E = \text{Ker}\,(f - \lambda_1 \text{Id}_E)^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \text{Ker}\,(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{\alpha_k}.$$

• Les $\text{Ker}\,(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}$ sont supplémentaires et stables par $f$. Donc, dans toute base adaptée à cette décomposition, la matrice de $f$ est diagonale par blocs.
• La restriction de $f$ à $\text{Ker}\,(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}$ induit un endomorphisme $f_i$ de ce sous-espace. $f_i$ admet une et une seule valeur propre à savoir $\lambda_i$ et $f_i - \lambda_i \text{Id}_{\text{Ker}(f-\lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}}$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $\alpha_i$.

# 5 Espaces préhilbertiens

**Produit scalaire.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur $E$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire

- $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique)
- $\forall (x, y, z) \in E^3$, $\forall (\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable et donc bilinéaire par symétrie)
- $\forall x \in E$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est positive)
- $\forall x \in E$, $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ ($\langle\ ,\ \rangle$ est définie).

**Inégalité de Cauchy-Schwarz.** $\forall (x, y) \in E^2$, $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$.

**Norme hilbertienne.** $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur $E$.

**Définition.** Si $E$ est de dimension finie, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien.

**Familles orthogonales, familles orthonormales.** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$.
$(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale $\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0$.
$(e_i)_{i\in I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow \forall (i, j) \in I^2,\ \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$.

**Théorème.** Une famille orthonormale de vecteurs tous non nuls est libre. Une famille orthonormale est libre.

**Théorème (procédé d'orthonormalisation de Schmidt).** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre. Il existe une famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une seule vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Vect}\,(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = \text{Vect}\,(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle u_n, e_n\rangle > 0$.

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'othonormalisée de la famille libre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle s'obtient par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

- $e_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|}u_1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $e'_{n+1} = u_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle u_{n+1}, e_k\rangle e_k$ puis $e_{n+1} = \dfrac{1}{\left\|e'_{n+1}\right\|}e'_{n+1}$.

**Théorème.** Si $E$ est euclidien, il existe au moins une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Dans ce cas,

- $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \langle x, e_i\rangle$.
- $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $\forall y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$, on a $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

**Définition.** Soit $A$ une partie non vide de $E$. L'orthogonal de $A$, noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de $E$ orthogonaux à tous les vecteurs de $A$ : $A^\perp = \{y \in E/\ \forall x \in A,\ \langle x, y\rangle = 0\}$.
**Convention.** $\varnothing^\perp = E$, $\{x\}^\perp = x^\perp$.

**Théorème.**

- $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A^\perp$ est un sev de $E$.
- $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
- $A^\perp = (\text{Vext}(A))^\perp$.
- Si $F$ est un sev, on a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$ mais on n'a pas toujours $F \oplus F^\perp = E$.

**Théorème de la projection orthogonale.**
Soit $E$ un espace préhilbertien puis $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ **de dimension finie**. Alors $E = F \oplus F^{\perp}$.
Si $x$ est un vecteur de $E$, on peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de $x$ sur $F$. Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de $E$, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

**Inégalité de Bessel.** Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale. Alors,

$$\forall x \in E,\ \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 \leqslant \|x\|^2.$$

**Familles totales.** Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale.

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille totale $\Leftrightarrow \overline{\text{Vect}\,(e_n)_{n \in \mathbb{N}}} = E \Leftrightarrow$ on a la formule de Parseval : $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$.

# 6 Espaces euclidiens

## 6.1 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

### 6.1.1 Matrices orthogonales

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $A$ et $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de $A$.

$$\begin{aligned} A \text{ est orthogonale} &\Leftrightarrow {}^tAA = A{}^tA = I_n \\ &\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = {}^tA \\ &\Leftrightarrow (C_1, \ldots, C_n) \text{ est une B.O.N de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ muni du produit scalaire canonique} \\ &\Leftrightarrow (L_1, \ldots, L_n) \text{ est une B.O.N de } \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ muni du produit scalaire canonique.} \end{aligned}$$

**Théorème.** $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA \in O_n(\mathbb{R})$.

**Théorème.** $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

**Théorème.** Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$, $\mathscr{B}$ une B.O.N de $E$, $\mathscr{B}'$ une famille de $n$ vecteurs de $E$, $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Alors, $\mathscr{B}'$ est une B.O.N de $E$ si et seulement si $A \in O_n(\mathbb{R})$.

**Théorème.** $A \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$.

**Théorème.** $O_n^+(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ et aussi de $(SL_n(\mathbb{R}), \times)$.

**Théorème.** $O_1(\mathbb{R}) = \{\pm I_1\}$. $O_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

### 6.1.2 Automorphismes orthogonaux

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est orthogonal} &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ (f conserve le produit scalaire)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\| \text{ (f conserve la norme (euclidienne))} \end{aligned}$$

**Théorème.** Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$, $\mathscr{B}$ une B.O.N de $E$, $f \in \mathscr{L}(E)$, $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, $f \in O(E)$ si et seulement si $A \in O_n(\mathbb{R})$.

**Théorème.** $f \in O(E) \Rightarrow \det(f) \in \{-1, 1\}$.

**Théorème.** $O^+(E) = SO(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$ et aussi de $(SL(E), \circ)$.

**Théorème.** $O(E_1) = \{\pm Id_{E_1}\}$. $O(E_2) = \{\text{rotations}\} \cup \{\text{réflexions}\}$.

### 6.1.3 Réduction des endomorphismes orthogonaux ou des matrices orthogonales

**Théorème.** Soit $f \in O(E)$ (resp. $A \in O_n(\mathbb{R})$). $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$).

**Théorème.** Soit $f \in O(E)$. Si $F$ est un sev de $E$ stable par $f$, alors $F^{\perp}$ est un sev de $E$ stable par $f$. Plus précisément, si $F$ est stable par $f$, la restriction de $f$ à $F$ (resp. $F^{\perp}$) induit un automorphisme orthogonal de $F$ (resp. $F^{\perp}$).

**Théorème.** $f \in O(E) \Leftrightarrow$ il existe une B.O.N de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est une matrice diagonale par blocs du type

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & R(\theta_k) & & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ où } R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \qquad (*).$$

$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A$ est orthogonalement semblable à une matrice du type $(*)$.

**Théorème.** $f \in O^+(E_3) \Leftrightarrow$ il existe une B.O.N de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 6.2 Endomorphismes symétriques, matrices symétriques (réelles)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $f$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.

**Théorème.** Soient $\mathscr{B}$ une B.O.N de $E$, $f \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. $f$ est symétrique $\Leftrightarrow A$ est symétrique.

**Théorème.** Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Alors, $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Les valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{C}$ sont réelles.

**Théorème.** Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Si $F$ est un sev de $E$ stable par $f$, alors $F^{\perp}$ est un sev de $E$ stable par $f$.

**Théorème spectral.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $f$ est symétrique $\Leftrightarrow f$ est diagonalisable en base orthonormée.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $A$ est symétrique $\Leftrightarrow f$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

**Définition.** Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
$A$ est positive $\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geqslant 0$ (notation : $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$).
$A$ est négative $\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \leqslant 0$ (notation : $A \in \mathscr{S}_n^-(\mathbb{R})$).
$A$ est définie, positive $\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T A X > 0$ (notation : $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).
$A$ est définie, négative $\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T A X < 0$ (notation : $A \in \mathscr{S}_n^{--}(\mathbb{R})$).

**Théorème.** Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
$A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$. $A \in \mathscr{S}_n^-(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^-$.
$A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$. $A \in \mathscr{S}_n^{--}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{-*}$.