Equivalents, o, O, développements limités ...

I. o *et* O

1) Définitions, généralités.

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n$) $\Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon v_n)$.

$f \underset{x\to a}{=} o(g)$ (ou $f \underset{x\to a}{\ll} g$) $\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$ (a réel ou infini).

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \Leftrightarrow \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bornée.

$f \underset{x\to a}{=} O(g) \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$bornée au voisinage de a (a réel ou infini).

2) Propriétés.

- $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1) \Leftrightarrow (u_n)$ bornée.
  $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1) \Leftrightarrow f$ bornée au voisinage de a (a réel ou infini).
- $o(o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et $O(O(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
  $o(o(f)) \underset{x\to a}{=} o(f)$ et $O(O(f)) \underset{x\to a}{=} O(f)$.
- $o(u_n) + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et $O(u_n) + O(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
  $o(f) + o(f) \underset{x\to a}{=} o(f)$ et $O(f) + O(f) \underset{x\to a}{=} O(f)$.
- $\forall \lambda \neq 0$, $o(\lambda u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et $O(\lambda u_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
  $\forall \lambda \neq 0$, $o(\lambda f) \underset{x\to a}{=} o(f)$ et $O(\lambda f) \underset{x\to a}{=} O(f)$.
- $o(u_n + o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et $O(u_n + O(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
  $o(f + o(f)) \underset{x\to a}{=} o(f)$ et $O(f + O(f)) \underset{x\to a}{=} O(f)$.

  Par exemple, $o\left(3n^2 - n + 3\right) + o\left(2n^2 + 1\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(3n^2\right) + o\left(2n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right) + o\left(n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right)$.
- $\forall \alpha > 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Rightarrow u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n^\alpha)$.
  $\forall \alpha > 0$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \Rightarrow f(x)^\alpha \underset{x\to a}{=} o(g(x)^\alpha)$.

II. *Développements limités*

1) Définition.

f admet un développement limité d'ordre n en $0 \Leftrightarrow$ il existe un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ de degré inférieur ou égal à n tel que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Plus généralement, f admet un développement limité d'ordre n en le réel $x_0 \Leftrightarrow$ il existe un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ de degré inférieur ou égal à n tel que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x - x_0) + o\left((x - x_0)^n\right) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

On lit donc l'ordre du développement dans le $o()$ et pas ailleurs.

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ est le développement limité de sin en 0 à l'ordre 3 et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$ est le développement limité de sin en 0 à l'ordre 4.

Un développement limité est unique en cas d'existence ou encore on peut identifier les coefficients de deux développements limités égaux. $P(x)$ (resp. $P(x - x_0)$) est la partie régulière du développement limité à l'ordre n du développement limité de f à l'ordre n en 0 (resp. x_0).

Th : Si f admet un DL d'orde n en 0 et est paire (resp. impaire), les coefficients a_{2k+1} (resp. a_{2k}) sont tous nuls.

Le premier terme non nul d'un développement limité fournit un équivalent simple.

Par exemple, $\sin x - x \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$ fournit en particulier $\sin x - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.

2) Formule de Taylor-Young.

Th : Si f est n fois dérivable en x_0, f admet en x_0 un développement limité d'ordre n, son développement de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).$$

La réciproque est fausse pour $n \geqslant 2$ ou encore une fonction peut admettre un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en x_0 et n'être pas dérivable en x_0. Par exemple, la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 à savoir $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0 (à faire). Par contre

Th : f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet en x_0 un développement limité d'ordre 1.

3) Techniques.

a) Troncature.

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet un développement limité d'ordre p en x_0 dont la partie régulière est la partie régulière du développement limité à l'ordre n, tronquée à l'ordre p.
Par exemple, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right)$, alors f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 : $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o\left(x^2\right)$

b) Développement limité d'une combinaison linéaire.

Pour obtenir le développement limité de $\lambda f + \mu g$ à l'ordre n, on écrit f et g à l'ordre n.
Par exemple, un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $2\sin x + \cos x$ est

$$2\sin x + \cos x \underset{x\to 0}{=} 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

et même mieux

$$2\sin x + \cos x \underset{x\to 0}{=} 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o\left(x^4\right) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

c) Développement limité d'un produit.

Pour obtenir le développement limité de $f \times g$ à l'ordre n, on écrit f et g à l'ordre n, on développe en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égaux à n (la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $f \times g$ est le produit des parties régulières des développements limités à l'ordre n de f et g, tronqué à l'ordre n).
Par exemple, un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^x \times \sqrt{1+x}$ est

$$\begin{aligned} e^x \times \sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x\left(1 + \frac{1}{2}\right) + x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + x^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{8} + \frac{17x^3}{48} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Quand la valuation de la partie régulière d'une parenthèse est supérieure ou égale à 1, on peut abaisser l'ordre de l'autre parenthèse. Par exemple, pour obtenir $\sin x \times \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0, on écrit

$$\sin(x^2) \times \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x^3 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$$

On veut obtenir le développement limité de $\sin^3 x \ln^2(1+x)(1-\cos x)$ à l'ordre 8 en 0.
Pour obtenir l'ordre auquel effectuer sin, on écrit $\sin^3 x \ln^2(1+x)(1-\cos x) = \sin x \times \sin^2 x \ln^2(1+x)(1-\cos x)$ avec $\sin^2 x \ln^2(1+x)(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^6}{2}$. On écrit donc $\sin x$ à l'ordre 2. De même, $\sin^3 x \ln(1+x)(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^6}{2}$ et on écrit $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 puis $\sin^3 x \ln^2(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ et on écrit $1 - \cos x$ à l'ordre 3 ce qui donne

$$\begin{aligned} \sin^3 x \ln^2(1+x)(1-\cos x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x + o\left(x^2\right)\right)^3\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2\left(\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} (x)^3\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^8\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{2}\left(x^2 - x^3\right) + o\left(x^8\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^7}{2} - \frac{x^8}{2} + o\left(x^8\right). \end{aligned}$$

Faire un développement limité de produit est plus difficile que faire un développement limité d'une combinaison linéaire. Linéariser toujours au maximum un produit avant de se lancer. Moins il y a de produits, mieux c'est.

Exemple 1. On veut le développement à l'ordre 4 en 0 de $\cos x \cos(3x)$. On écrit

$$\begin{aligned}\cos x\cos(3x) &= \frac{1}{2}\left(\cos(2x)+\cos(4x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+1-\frac{16x^2}{2}+\frac{256x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{17x^2}{4}+\frac{257x^4}{48}+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

Exemple 2. On veut le développement à l'ordre 3 en 0 de $\ln\left(\dfrac{2+x}{1-x}\right)$. On écrit

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right) &= \ln(2+x)-\ln(1-x) = \ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln(1-x)\\ &\underset{x\to 0}{=} \ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \ln 2+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{8}+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Exemple 3. On veut le développement à l'ordre 2 en 0 de $\left(e^x\right)^2$. On écrit

$$\left(e^x\right)^2 = e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1+2x+2x^2+o\left(x^2\right).$$

d) Développement limité d'une composée.

Si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et a un développement limité d'ordre n en 0 : $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+o\left(x^n\right)$ (le coefficient constant de P est donc nul) et si g a un développement limité d'ordre n en 0 : $g(y) \underset{y\to 0}{=} Q(y)+o\left(y^n\right)$, alors $g\circ f$ a un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est $Q\circ P$ tronquée à l'ordre n.

Par exemple, on veut $e^{x/(1-x)}$ à l'ordre 3 en 0.

$$\begin{aligned}e^{x/(1-x)} &\underset{x\to 0}{=} e^{x\left(1+x+x^2+o\left(x^2\right)\right)} = e^{x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x+x^2+x^3\right)+\frac{1}{2}\left(x+x^2\right)^2+\frac{1}{6}(x)^3+o\left(x^3\right)\ \left(\text{car } x+x^2+x^3 \underset{x\to 0}{\to} 0\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{13x^3}{6}+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

e) Développement limité d'un quotient.

On se ramène aux deux paragraphes précédents à l'aide de $\dfrac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+\ldots+u^n+o\left(u^n\right)$.

Par exemple, on veut $\tan x$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned}\tan x &\underset{x\to 0}{=} \frac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)}{1-\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}\right)+o\left(x^4\right)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)\left(1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}\right)+o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

f) Intégration des développements limités.

Soit f admettant un développement limité d'ordre n en x_0 : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0+a_1\left(x-x_0\right)+\ldots+a_n\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$.

Si F est une primitive de f, F admet en x_0 un développement limité d'ordre $n+1$ obtenu « par intégration » sans oublier la constante :

$$F(x) \underset{x \to x_0}{=} F(x_0) + a_0 (x - x_0) + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + \ldots + a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right).$$

Exemple. Développement de Arcsin à l'ordre $2n+1$ en 0. On développe d'abord sa dérivée à l'ordre $2n$ en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-x^2\right)^k + o\left(x^{2n}\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right),\end{aligned}$$

avec pour $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} &= (-1)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{2k-1}{2}}{k!} \\ &= \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k-1)}{2^k k!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2k-1) \times (2k)}{2^k k! (2 \times 4 \times \ldots \times (2k))} \\ &= \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2}.\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $k = 0$. Donc, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$. Par intégration et en tenant compte de Arcsin $(0) = 0$

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}\,(x) &\underset{x \to 0}{=} \text{Arcsin}\,(0) + x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).\end{aligned}$$

Danger. En général, on ne dérive pas un développement limité. Si f est dérivable, il se peut que f ait un développement limité à un certain ordre n et que f' n'admette pas de développement limité d'ordre $n-1$. Par exemple, si $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$. D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ (à faire). f' n'a pas de limite réelle en 0 et donc f' n'a même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Par contre, si f' admet en x_0 un développement limité d'ordre n, alors f admet en x_0 un développement limité d'ordre $n+1$, et le développement limité d'ordre n de f' en x_0 s'obtient « en dérivant le développement limité » d'ordre $n+1$ de f en x_0.

g) Développement limité en un réel non nul.

On a deux techniques et souvent seule une des deux est utilisable.

Utilisation d'un changement de variables pour disposer du formulaire de développements limités en 0. Par exemple, on veut $\dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{3}$. On pose $h = x - \dfrac{\pi}{3}$ ou encore $x = \dfrac{\pi}{3} + h$ de sorte que x tend vers $\dfrac{\pi}{3}$ si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+h\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{2}\sin h + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos h} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{h}{2}-\dfrac{\sqrt{3}h^2}{2}+o\left(h^2\right)} \underset{h\to 0}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\dfrac{h}{\sqrt{3}}-h^2+o\left(h^2\right)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\left(\frac{h}{\sqrt{3}}-h^2\right)+\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2+o\left(h^2\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2h}{3}+\frac{8h^2}{3\sqrt{3}}+o\left(h^2\right) \\
&\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser directement la formule de Taylor-Young. Par exemple, on veut $f(x) = \arctan(x)$ à l'ordre 2 en 1. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\text{Arctan}\,(x) &\underset{x\to 1}{=} f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right) \\
&\underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).
\end{aligned}$$

III. Equivalents

1) Définition.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o\left(u_n\right)$.

$f \underset{x\to a}{\sim} g \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1 \Leftrightarrow g \underset{x\to a}{=} f + o\left(f\right)$ (a réel ou infini).

2) Propriétés.

Th : La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ est une relation d'équivalence (sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang).

Th : Si u_n a une limite **non nulle** ℓ, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Th : Les équivalents fonctionnent très bien avec les produits, les quotients, les exposants **fixes**.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$, alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$ et $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{t_n}$ (on peut multiplier ou diviser membre à membre des équivalents).
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ (on peut élever les deux membres d'un équivalent à un même exposant fixe (ne variant pas quand n varie)).

3) Les dangers des équivalents.

• On n'écrit jamais $u_n \sim 0$ ou $f \sim 0$. Cela ne veut rien dire.

• **Les sommes.** En général, on n'additionne pas membre à membre des équivalents.
Par exemple, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x + x^2$ (car $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\sim} x + x^2$) et $-\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -x + x^5$ (car $-\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -x \underset{x\to 0}{\sim} -x + x^5$) mais $\sin x - \ln(1+x)$ n'est pas du tout équivalent en 0 à $x^2 + x^5$.

Pour obtenir, un équivalent de somme, on revient à $=$ et $o(\ )$ ($f \underset{x\to a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{x\to a}{=} f + o\left(f\right)$). Par exemple,

$$\sin x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \left(x + o\left(x^2\right)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right),$$

et donc $\sin x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

Par contre, on peut additionner des équivalents dans le cas particulier où les équivalents principaux (les équivalents les plus simples possibles) ne se simplifient pas. Par exemple, $\sqrt{4x^2 - x + 1} + x \underset{x\to-\infty}{\sim} -2x + x = -x$.

• On ne passe pas un terme de l'autre côté d'un équivalent (c'est une variante du danger précédent).

L'écriture $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x - \dfrac{x^3}{6}$ ne signifie pas $\sin x - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$ ou encore l'écriture $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x - \dfrac{x^3}{6}$ ne signifie pas $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. L'écriture $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x - \dfrac{x^3}{6}$ a une signification bien moins forte que $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. On a par exemple, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x + x^3$ (car $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\sim} x + x^3$) et pourtant, on n'a pas $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + x^3 + o\left(x^3\right)$.
Quand on écrit des équivalents, en général, on n'écrit un seul terme à savoir le terme prépondérant. Les autres termes ne servent à rien.

• **Les logarithmes.** Si u_n et v_n (ou f et g) sont soit des infiniment grands équivalents, soit des infiniment petits équivalents, alors $\ln(u_n)$ et (v_n) (ou $\ln\circ f$ et $\ln\circ g$) sont équivalents.
Par exemple, $\ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\ln(n)$.
Par contre, si u_n et v_n (ou f et g) sont équivalents et tendent vers 1, on ne doit surtout pas passer aux logarithmes. Par exemple, $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$ mais $\ln(\cos x)$ n'est pas équivalent à $\ln(1+x)$ car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et

$$\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

• **Les exponentielles.** On ne passe pas aux exponentielles dans des équivalents ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \not\Rightarrow e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.
Une variante est : on n'élève pas les deux membres d'un équivalent à un même exposant **variable**.
Par exemple, $1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ mais $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} 1^n = 1$ car

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e.$$

La bonne règle est

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \Leftrightarrow v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ ou encore } e^{u_n+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n},$$

et aussi

$$e^f \underset{x\to a}{\sim} e^g \Leftrightarrow g - f \underset{x\to a}{\to} 0 \text{ ou encore } e^{f+o(1)} \underset{x\to a}{\sim} e^f.$$

Par exemple, pour trouver un équivalent simple de $(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0, on écrit

$$(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1)} \underset{x\to 0}{\sim} e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{e}}.$$

(On a écrit un développement de l'exposant jusqu'à $o(1)$ puis on a effacé le $o(1)$).

IV. Les théorèmes de croissances comparées

Pour les suites :

- $\alpha < \alpha' \Rightarrow n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\alpha'}\right)$.
- $|q| < |q'| \Rightarrow q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(q'^n\right)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta > 0$, $\ln^\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$.
- $|q| < 1 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\alpha\right)$ et $|q| > 1 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(q^n\right)$.
- $\forall q \in \mathbb{R}$, $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Pour les fonctions :

- $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ et $\alpha < \beta \Rightarrow x^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(x^\alpha\right)$.
- $0 < a < b \Rightarrow a^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(b^x\right)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta > 0$, $\ln^\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta < 0$, $\ln^\alpha(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^\beta\right)$.

  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln^\alpha(x) x^\beta = 0$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$, $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(a^x\right)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$, $a^x \underset{x\to-\infty}{=} o\left(|x|^\alpha\right)$.

  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0$.