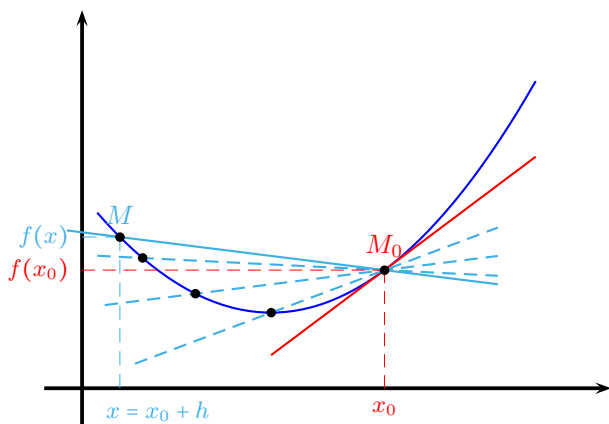
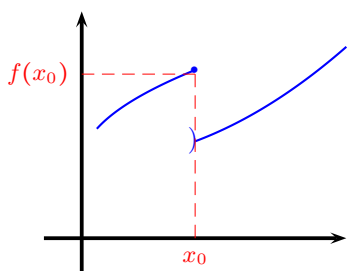


Nombre dérivé en un point. Tangente



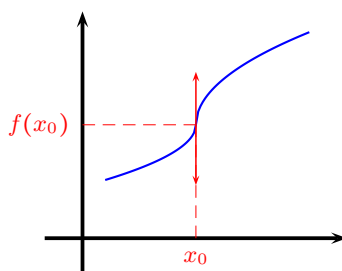
- $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. Pour $x \neq x_0$, le coefficient directeur de la droite (M_0M) est $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0 .
Il revient au même de dire que le taux $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite finie quand h tend vers 0.
- Dans ce cas, le **nombre dérivé** de f en x_0 est
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
- Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f en $M_0(x_0, f(x_0))$ est
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Trois situations où la fonction f n'est pas dérivable en x_0



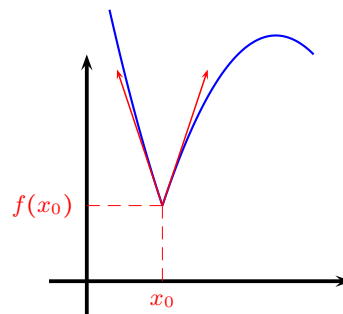
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

f n'est pas continue en x_0 .



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty.$$

\mathcal{C}_f admet une tangente parallèle à (Oy) .



$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

\mathcal{C}_f admet deux demi-tangentes de directions différentes.

Fonctions dérivables sur un intervalle. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en chaque réel x de I . La fonction dérivée de f , notée f' , est alors la fonction qui à chaque réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de la fonction f en x .

Lien avec la continuité

- Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
- Si f est continue en a , f n'est pas obligatoirement dérivable en a .

La fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} mais n'est pas dérivable en 0. La fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0. On a ainsi deux exemples de fonctions continues et non dérivables en un point. On ne peut pas dire « f est dérivable et continue sur I » et encore moins « f est continue et donc dérivable sur I ».

Dérivées et opérations

Théorème. • Si u et v sont dérivables sur I , alors $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

- Si u et v sont dérivables sur I , alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

- Si u et v sont dérivables sur I et si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Théorème. • Si u est dérivable sur I et strictement positive sur I , alors \sqrt{u} est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

- Si u est dérivable sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si u est dérivable sur I à valeurs dans J et si f est dérivable sur J , alors $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I , $(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$.

Dérivées et sens de variation

Soit f une fonction **dérivable** sur un **intervalle** I .

- Si $f' \geq 0$ (respectivement $f' \leq 0$), f est croissante sur I (respectivement décroissante sur I).
- Si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I).
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .

Dérivées et extrema des fonctions

Soient f une fonction **dérivable** sur un **intervalle ouvert** I et x_0 un réel de I .

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, $f(x_0)$ est un extremum local de f .