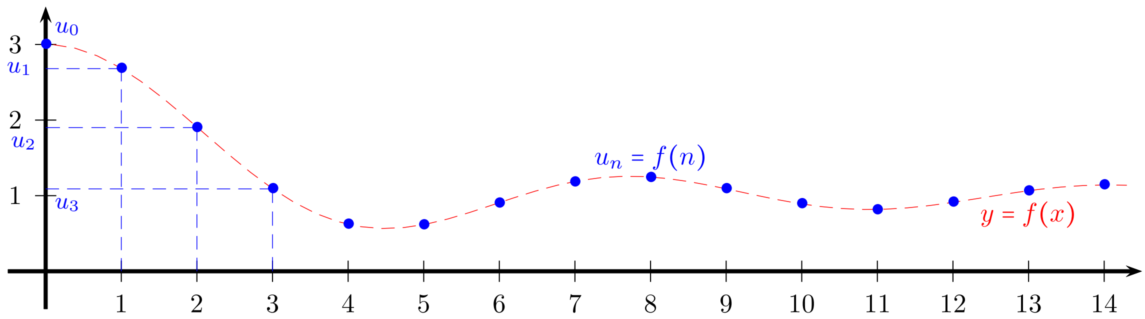
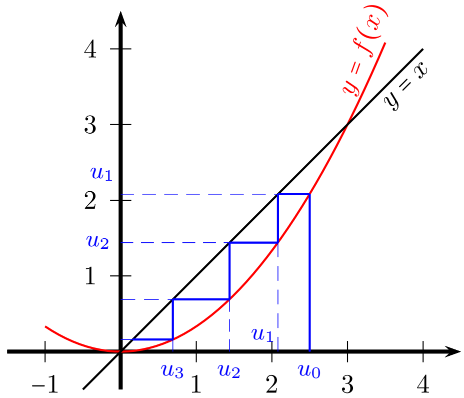
Suites

Représentation graphique d'une suite du type $u_n = f(n)$



Représentation graphique d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



- On construit $(\mathscr{C}_f)$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.
- On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- On trace un trait vertical de ce point à $(\mathscr{C}_f)$ c'est-à-dire le segment joignant les points $(u_0, 0)$ et $(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$ et on peut lire u_1 horizontalement sur l'axe des ordonnées.
- On ramène u_1 sur l'axe $(0x)$ en traçant le trait horizontal joignant le point (u_0, u_1) et la droite $(\mathscr{D})$ c'est-à-dire le segment joignant les points(u_0, u_1) et (u_1, u_1). On peut maintenant lire u_1 sur l'axe (Ox).
- On trace un trait vertical du point (u_1, u_1) à $(\mathscr{C}_f)$ et on peut lire u_2 horizontalement sur l'axe des ordonnées...

Sens de variation d'une suite réelle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
- La suite (u_n) est monotone si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  La suite (u_n) est strictement monotone si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou strictement décroissante.
- La suite (u_n) est constante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

Techniques d'étude du sens de variation d'une suite

- On compare directement u_{n+1} à u_n pour chaque entier n.
- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour chaque entier n.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et définie par des produits (ex : $u_n = 2^n n!$), on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour chaque entier n.
- Si la suite est du type $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f puis utiliser le théorème :
  si f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et si pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, alors
  si f est croissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
  si f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante,
  si f est décroissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
  si f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Suites réelles majorées, minorées, bornées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si et seulement si il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et majorée.

Limite d'une suite

(u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

(u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, A[$) contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Opérations sur les limites

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
(u_n+v_n) a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$(u_n\times v_n)$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
(v_n) a pour limite	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$	0 en étant >0	0 en étant >0	0 en étant <0	0 en étant <0	0
$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Les quatre formes indéterminées.

$$+\infty-\infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0\times\infty$$

Limites des suites de référence

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k\geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

Si $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ $\qquad$ Si $q=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$ $\qquad$ Si $-1<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Si $q\leqslant -1$, q^n n'a pas de limite, ni réelle, ni infinie

Limites et inégalités

Théorème. Si pour tout n à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n$ et si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.
Si pour tout n à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n$ et si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.

Théorème. Si pour tout n à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n$, si u_n converge vers ℓ et si (v_n) converge vers ℓ', alors $\ell\leqslant\ell'$.

Théorème des gendarmes. Si pour tout n à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} ell$.

Suites monotones et limites

Théorème. Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème. Si (u_n) tend vers ℓ en croissant, alors pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant\ell$.
Si (u_n) tend vers ℓ en décroissant, alors pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant\ell$.