Polynômes de Legendre

Adrien-Marie Legendre, mathématicien français est né en 1752 et est mort en 1833 .

1) Définition des polynômes L_n

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$L_n = \frac{1}{2^n n!}\left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(n)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \left(X^2-1\right)^n$ de sorte que $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}P_n^{(n)}$.

2) Degré, coefficient dominant

Soit $n \in \mathbb{N}$. P_n est de degré $2n$ et donc L_n est de degré $2n-n=n$. Ensuite, $\text{dom}\left(L_n\right) = \dfrac{1}{2^n n!}\text{dom}\left(X^2 n - \ldots\right)^{(n)} = \dfrac{2^n n!}{\times}\dfrac{(2n)!}{n!} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg\left(L_n\right) = n \text{ et } \text{dom}\left(L_n\right) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg\left(L_n\right) = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(L_k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Parité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $P_n(-X) = P_n(X)$ puis, en dérivant n fois, $(-1)^n P_n^{(n)}(-X) = P_n^{(n)}(X)$ ou encore $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$. Donc,

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ L_n \text{ a la parité de } n.$$

4) Coefficients.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En développant P_n grâce à la formule du binôme de Newton, on a $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}X^{2n-2k}$. Par suite, (en notant $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x)

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(X^{2n-2k}\right)(n) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\left(X^{2n-2k}\right)(n) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(2n-2k)!}{n!(n-2k)!}X^{n-2k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{k}X^{n-2k}.
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{k}X^{n-2k}.$$

5) Les premiers polynômes de Legendre.

$L_0 = (1)^{(0)} = 1$. $L_1 = \dfrac{1}{2}\left(X^2-1\right)' = X$. $L_2 = \dfrac{1}{8}\left(X^4-2X^2+1\right)'' = \dfrac{1}{8}\left(12X^2)4\right) = \dfrac{1}{2}\left(3X^2-1\right)$.
$L_3 = \dfrac{1}{8\times 6}\left(X^6-3X^4+3X^2-1\right)^{(3)} = \dfrac{1}{48}\left(120X^3-72X\right) = \dfrac{1}{2}\left(5X^3-3X\right)$

$$L_0 = 1,\ L_1 = X,\ L_2 = \frac{1}{2}\left(3X^2-1\right),\ L_3 = \frac{1}{2}\left(5X^3-3X\right).$$

6) Une autre expression de L_n. Valeurs en 1 et -1

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2^n n!}\left((X-1)^n(X+1)^n\right) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((X-1)^n\right)^{(k)}\left((X+1)^n\right)^{(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

Ensuite, $L_0(1) = 1$ puis, pour $n \geqslant 1$, $L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k = \frac{1}{2^n}\left((X+1)^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k\right)$.
On en déduit que $L_n(1) = \frac{1}{2^n}(1+1)^n = 1$, ce qui reste vrai quand $n = 0$. Par parité, $L_n(-1) = (-1)^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_n(1) = 1 \text{ et } L_n(-1) = (-1)^n.$$

7) Orthogonalité des polynômes L_n et norme de L_n

a) Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

- Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$ et donc la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est intégrable sur $[-1, 1]$. $\langle\ ,\ \rangle$ est une application de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$. Donc, $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique.
- $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégration.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1}(P(t))^2\,dt \geqslant 0$ et de plus,

$$\begin{aligned}
\langle P, P\rangle = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1}(P(t))^2\,dt = 0 \\
&\Rightarrow \forall t \in [-1, 1],\ (P(t))^2 = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Longrightarrow \forall t \in [-1, 1],\ P(t) = 0 \\
&\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Orthogonalité des polynômes L_n

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$ (en particulier, $m \geqslant 1$). Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0, m]\!]$,

$$\left\langle P_n^{(n)}, P_m^{(m)}\right\rangle = (-1)^k\int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(t)P_m^{(m-k)}(t)\,dt\ (*).$$

- L'égalité est vraie quand $k = 0$.
- Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}
\left\langle P_n^{(n)}, P_m^{(m)}\right\rangle &= (-1)^k\int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(t)P_m^{(m-k)}(t)\,dt \\
&= (-1)^k\left(\left[P_n^{(n+k)}(t)P^{(m-k-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k+1)}(t)P_m^{(m-k-1)}\,dt\right)
\end{aligned}$$

Maintenant, 1 et -1 sont racines d'ordre m de P_m et donc d'ordre $m-(m-k-1) = k+1$ de $P_m^{(m-k-1)}$. Puisque

$k+1 \geqslant 1$, 1 et -1 sont racines de $P_m^{(m-k-1)}$. Il reste $\left\langle P_n^{(n)}, P_m^{(m)}\right\rangle (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} P_n^{(n+k+1)}(t)P_m^{(m-k-1)}\ dt$.

Le résultat est démontré par récurrence. En particulier, quand $k=n$, on obtient $\left\langle P_n^{(n)}, P_m^{(m)}\right\rangle = (-1)^n\int_{-1}^{1} P_n^{(m+n)}(t)P_m(t)\ dt$.

Puisque $n+m > 2n = \deg(P_n)$, $P_n^{(m+n)} = 0$ puis $\left\langle P_n^{(n)}, P_m^{(m)}\right\rangle = 0$ et donc $\langle L_n, L_m\rangle = 0$. On a montré que

$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}[X], \langle\ ,\ \rangle)$.

c) Norme de L_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les égalités $(*)$ sont encore valables quand $m = n$. Quand $k = m = n$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n\rangle &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n\left(\left(t^2-1\right)^n\right)^{(2n)}\ dt = \frac{((2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n\ dt\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times 2\int_{0}^{1}\left(1-t^2\right)^n\ dt \text{ (par parité)}\\ &= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2(u)\right)^n\ (-\sin(u)du) = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(t)\ dt.\end{aligned}$$

Le calcul usuel des intégrales de Wallis (voir la rubrique « Intégration ») fournit $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(t)\ dt = W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Il reste $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$ et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

8) Racines de L_n

Soit $n \geqslant 1$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(k)}$ s'annule en (au moins) k réels deux à deux distincts de l'intervalle $]-1, 1[$.

- La proposition est vraie quand $k = 0$.
- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $P_n^{(k)}$ s'annule en k réels deux à deux distincts de l'intervalle $]-1, 1[$.
Puisque P_n admet -1 et 1 pour racines d'ordre n, $P_n^{k)}$ admet -1 et 1 pour racines d'ordre $n-k$ avec $n-k>0$.
En particulier, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et 1 et donc $P_n^{(k)}$ s'annule en $k+2$ réels deux à deux distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.
On note x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ces réels où la numérotation a été faite de sorte que $-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} = 1$.

  Ainsi, pour chaque $i \in [\![0, k]\!]$, $P_n^{(k)}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prend la même valeur en x_i et x_{i+1} à savoir 0. D'après le théorème de Rolle, $P_n^{(k+1)} = \left(P_n^{(k)}\right)'$ s'annule dans chacun des $k+1$ intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leqslant k \leqslant n$,

On a montré par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(k)}$ s'annule en k réels deux à deux distincts de l'intervalle $]-1, 1[$. En particulier, $P_n^{(n)}$ et donc L_n s'annule en n réels deux à deux distincts de l'intervalle $]-1, 1[$. Puisque L_n est de degré n, on a « trouvé » toutes les racines de L_n, toutes réelles, simples et dans $]-1, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n a n racines simples, toutes dans $]-1, 1[$.

9) Equation différentielle

Soit $n \geqslant 1$. On a $P_n = \left(X^2-1\right)^n$ puis $P_n' = 2nX\left(X^2-1\right)^{n-1}$ et donc $\left(X^2-1\right)P_n' = 2nXP_n$. On dérive $n+1$ fois cette égalité grâce à la formule de Leibniz. On obtient

$$\left(X^2-1\right)P_n^{(n+2)} + 2(n+1)XP_n^{(n+1)} + 2\frac{(n+1)n}{2}P_n^{(n)} = 2n\left(XP_n^{(n+1)} + (n+1)P_n^{(n)}\right)$$

ou encore, après multiplication des deux membres par $\dfrac{1}{2^n n!}$,

$$\left(X^2-1\right)L_n'' + 2(n+1)XL_n' + n(n+1)L_n = 2nXL_n' + 2n(n+1)L_n$$

et finalement

$$\left(X^2-1\right)L_n''+2XL_n'-n(n+1)L_n=0,$$

ce qui reste vrai quand $n=0$.

$$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \left(X^2-1\right)L_n''+2XL_n'-n(n+1)L_n=0.$$

10) Eléments propres d'un endomorphisme

L'égalité précédente s'écrit aussi

$$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \left(\left(X^2-1\right)L_n'\right)'=n(n+1)L_n.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $T\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \left(\left(X^2-1\right)P'\right)'\end{array}$. Vérifions que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Alors, $P'\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis $\left(X^2-1\right)P'\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et finalement, $T(P)=\left(\left(X^2-1\right)P'\right)'\in\mathbb{R}_n[X]$. T est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
Soient $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$T(\lambda P+\mu Q)=\left(\left(X^2-1\right)(\lambda P+\mu Q)'\right)'=\lambda\left(\left(X^2-1\right)P'\right)'+\mu\left(\left(X^2-1\right)Q'\right)'=\lambda T(P)+\mu T(Q).$$

Finalement, T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'égalité $\left(\left(X^2-1\right)L_n'\right)'=n(n+1)L_n$ fournit encore : $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $T\left(L_k\right)=k(k+1)L_k$. La famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de T.

11) Relation de récurrence

Soit $n\geqslant 1$. $P_{n+1}'=2(n+1)X\left(X^2-1\right)^n=2(n+1)XP_n$ (I) puis

$$\begin{aligned}P_{n+1}''&=2(n+1)P_n+2(n+1)XP_n'=2(n+1)P_n+2(n+1)X\times 2nXP_{n-1}=2(n+1)P_n+4n(n+1)X^2P_{n-1}\\&=2(n+1)P_n+4n(n+1)\left(X^2-1+1\right)P_{n-1}=2(n+1)P_n+4n(n+1)P_n+4n(n+1)P_{n-1}\\&=2(n+1)(2n+1)P_n+4n(n+1)P_{n-1}\end{aligned}$$

et donc, $P_{n+1}''=2(n+1)(2n+1)P_n+4n(n+1)P_{n-1}$ (II).

On dérive n fois la relation (I) grâce à la formule de Leibniz. On obtient $P_{n+1}^{(n+1)}=2(n+1)XP_n^{(n)}+2n(n+1)P_n^{(n-1)}$ puis après division des deux membres par $\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$,

$$L_{n+1}=XL_n+\frac{1}{2^n(n-1)!}P_n^{(n-1)}\quad\text{(III)}.$$

On dérive $n-1$ fois la relation (II) grâce à la formule de Leibniz. On obtient $P_{n+1}^{(n+1)}=2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)}+4n(n+1)P_{n-1}^{(n-1)}$ puis, après division des deux membres par $\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$

$$L_{n+1}=\frac{2n+1}{2^nn!}P_n^{(n-1)}+L_{n-1}\quad\text{(IV)}.$$

$(2n+1)\times$(III) $-\,n\times$(IV) fournit alors $(n+1)L_{n+1}=(2n+1)XL_n-nL_{n-1}$. Ainsi,

$$L_0=1,\ L_1=X\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)L_{n+1}-(2n+1)XL_n+nL_{n-1}=0.$$

