Intégrales de Wallis

John Wallis, mathématicien anglais, est né en 1616 et est mort en 1703. Wallis est donc antérieur à Newton.

1) Définition.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\ dt.$$

W_n existe pour tout entier naturel n car la fonction $t \mapsto \sin^n t$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Autres expressions de W_n.

Le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - t$ fournit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\ dt.$$

Soit ε un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $u \mapsto \text{Arcsin}\, u = t$ est de classe C^1 sur $\left[0, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right]$ et on peut poser $t = \text{Arcsin}\, u$ ou encore $u = \sin t$ pour obtenir $\displaystyle\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n t\ dt = \int_0^{\sin(\pi/2-\varepsilon)} \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$. Quand ε tend vers 0 par valeurs supérieures, $\displaystyle\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n t\ dt$ tend vers W_n et il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\sin(\pi/2-\varepsilon)} \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$ de sorte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$ converge. Comme la fonction $u \mapsto \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}$ est positive sur $[0, 1[$, on en déduit que cette fonction est intégrable sur $[0, 1[$. Quand ε tend vers 0, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du.$$

On peut aussi poser $u = \sin t$ dans l'intégrale définissant W_{2n+1} pour obtenir

$$W_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right)^n \cos t\ dt = \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^n\ du.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \int_0^1 (1-u^2)^n\ du.$$

3) Signe et sens de variation de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \sin^n t$, est continue, positive et non nulle (mais pas strictement positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, $W_n > 0$.

La fonction $t \mapsto \sin^n t - \sin^{n+1} t = \sin^t(1 - \sin t)$, est continue, positive et non nulle (mais pas strictement positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, $W_n - W_{n+1} > 0$ et finalement $0 < W_{n+1} < W_n$.

La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.

4) Limite.

1ère idée. On montre « à la main » que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit a un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout naturel n, on a

$$0 \leqslant W_n = \int_0^a \sin^n t\ dt + \int_a^{\pi/2} \sin^n t\ dt \leqslant a \sin^n a + \left(\frac{\pi}{2} - a\right).$$

On choisit et on fixe a dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de sorte que $0 < \frac{\pi}{2} - a < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $0 \leqslant W_n \leqslant a \sin^n a + \frac{\varepsilon}{2}$.

Maintenant, puisque a est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin a$ est dans $]0, 1[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a \sin^n a = 0$.

Il existe ainsi un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $a \sin^n a \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $W_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant W_n \leqslant \varepsilon)$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = 0.$$

2ème idée. On utilise le théorème de convergence dominée pour atteindre le même but.
Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = \sin^n t$ (avec la convention usuelle $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_0(t) = 1$).

- Chaque fonction f_n est intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car continue sur ce segment.
- La suite de fonction f_n converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f définie par :
$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \frac{\pi}{2} \\ 1 \text{ si } t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.
De plus, f est continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue et intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \to +\infty} W_n = \int_0^{\pi/2} f(t)\ dt = 0$.

3ème idée. L'équivalent de W_n obtenu en 11) fournit en particulier $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$.

5) Premières valeurs.
$W_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\ dt = 1$.

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.$$

6) Relation de récurrence.

Soit n un entier naturel. Les deux fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin t \times \sin^{n+1} t\ dt = \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t\ dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)\sin^n t\ dt = (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \text{ ou encore } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

7) Calcul de W_n.
Soit p un entier naturel non nul.

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2}W_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 1}{((2p)(2p-2)\dots 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} \times \frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} \times \frac{\pi}{2}.$$

De même, si p un entier naturel non nul,

$$W_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1}W_1 = \frac{((2p)(2p-2)\dots 2)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\dots 1} = \frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $p=0$.

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ W_{2p+1}=\frac{(2p)(2p-2)\ldots 2}{(2p+1)(2p-1)\ldots 1}\text{ et }\forall p\in\mathbb{N},\ W_{2p+1}=\frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}.$$

8) W_{n+1} est équivalent à W_n.

D ?après 3), la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante. Donc, pour tout naturel n, on a $W_{n+2}<W_{n+1}<W_n$. Après division par le réel strictement positif W_n, on obtient d'après 6)

$$\frac{n+1}{n+2}=\frac{W_{n+2}}{W_n}<\frac{W_{n+1}}{W_n}<\frac{W_n}{W_n}=1.$$

Quand n tend vers l'infini, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=1$ ou encore

$$W_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}W_n.$$

9) Formule de WALLIS.

D'après 8), $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}=1$. D'autre part, d'après 7), $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}=\frac{(2\times4\times\ldots\times(2p))^2}{(3\times5\times\ldots\times(2p-1))^2}\frac{2}{(2p+1)\pi}$. On obtient ainsi une première version de la formule de WALLIS

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}=\lim_{p\to+\infty}\sqrt{p}\frac{1\times3\times\ldots\times(2p-1)}{2\times4\times\ldots\times(2p)}.$$

ou encore, en élevant au carré et après simplification, on obtient (avec une formulation médiocre car les produits apparaissant au numérateur et au dénominateur sont divergents) :

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\ldots}{2\times4\times4\times6\times6\times\ldots}.$$

10) La suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

D'après 6), pour tout entier naturel n, on a $(n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n$ et donc $(n+2)W_{n+1}W_{n+2}=(n+1)W_nW_{n+1}$. Ainsi, la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc, pour tout entier naturel n, $(n+1)W_nW_{n+1}=W_0W_1=\frac{\pi}{2}$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)W_nW_{n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

11) Equivalent simple de W_n quand n tend vers $+\infty$.

D'après 8), $W_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}W_n$ et donc, d'après 10),

$$\frac{\pi}{2}=(n+1)W_nW_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}nW_n^2.$$

Puisque $W_n>0$, on en déduit que $W_n=\sqrt{W_n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

$$W_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

12) Série entière associée à W_n.

Puisque $W_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, la série entière $\sum W_nx^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Pour $x\in]-1,1[$, on pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}W_nx^n$.

Pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, tout réel x tel que $|x|<1$ et tout entier naturel n, on a

$$|(\cos^n t)\,x^n|\leqslant|x|^n.$$

Puisque la série géométrique de terme général $|x|^n$ converge pour x donné tel que $|x|<1$, la série de fonctions de terme général $t\mapsto\cos^n(t)x^n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, pour $x\in]-1,1[$ fixé, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt\right) x^n = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (x\cos t)^n\right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t} \, dt.$$

Soit $x \in]-1,1[$ fixé. Calculons l'intégrale précédente en posant $u = \tan\frac{t}{2}$ et donc $dt = \frac{2du}{1+u^2}$. On obtient

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t} \, dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} \, du = \int_0^1 \frac{2}{(1-x) + u^2(1+x)} \, du$$

$$= \frac{2}{1+x} \int_0^1 \frac{1}{u^2 + \left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2} \, du = \frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left[\operatorname{Arctan} \frac{u}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Donc,

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Maintenant, pour $x = 1$, puisque $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, la série de terme général W_n diverge ou encore f n'est pas défini en 1.
D'autre part, pour $x = -1$, la suite W_n est positive et tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n W_n$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Montrons alors que la somme f est continue en -1.
Soit $x \in [-1,0]$. La suite $(-1)^n W_n x^n = W_n(-x)^n = W_n|x|^n$ est positive et tend vers 0 en décroissant (produit de deux suites positives décroissantes). La série de terme général $W_n x^n$ est donc une série alternée. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} W_k x^k\right| \leqslant \left|W_{n+1}x^{n+1}\right| = W_{n+1}|x|^{n+1} \leqslant W_{n+1},$$

et donc

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} W_k x^k\right|, \ x \in [-1,0]\right\} \leqslant W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

La série entière de somme f converge uniformément vers f sur $[-1,0]$. On en déduit que f est continue sur $[-1,0]$ et en particulier que

$$f(-1) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Maintenant, quand x tend vers -1,

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sim \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x} \sim 1.$$

On a montré que

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n W_n = 1.$$

13) Volume de la boule unité en dimension n (hors programme).
Soit E un espace euclidien de dimension n strictement positive et $B_n(R)$ la boule de centre O et de rayon strictement positif R. Le volume de $B_n(R)$ est

$$V_n(R) = \int\cdots\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2} dx_1 \ldots dx_n.$$

On effectue déjà le changement de variables $x_1 = Ry_1$, ... , $x_n = Ry_n$. Le jacobien de ce changement de variables linéaire est R^n et donc $V_n(R) = R^n \displaystyle\int\cdots\int_{y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1} dy_1\ldots dy_n = R^nV_n(1)$.

$$(\forall R > 0),\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ V_n(R) = R^nV_n(1).$$

Il reste à calculer $V_n(1)$. Soit n un naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}V_n(1) &= \int\cdots\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1} dx_1\ldots dx_n = \int_{x_n=-1}^{x_n=1}\left(\int\cdots\int_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2} dx_1\ldots dx_{n-1}\right) dx_n = \int_{x_n=-1}^{x_n=1} V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)\,dx_n \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} V_{n-1}(1)\,dx = I_{n-1}V_{n-1}(1),\end{aligned}$$

où $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^n dx = 2\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^n dx$ ou encore, en posant $x = \cos t$:

$$I_n = 2\int_{\pi/2}^{0}\left(\sqrt{1-\cos^2 t}\right)^n(-\sin t)\,dt = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{n+1} t\,dt = 2W_{n+1}.$$

En tenant compte de $V_1(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} dx = 2$, on obtient

$$V_1(1) = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ V_n(1) = 2W_nV_{n-1}(1).$$

Par suite, pour $n \geqslant 2$, $V_n(1) = V_n(1)(2W_2)(2W_3)\ldots(2W_n) = 2^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n} W_k$ (puisque $W_1 = 1$). On retrouve en particulier

$$\forall R > 0,\ V_1(R) = 2R,\ V_2(R) = \pi R^2 \text{ et } V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Plus généralement, en tenant compte de l'égalité, valable pour tout entier naturel n, $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$, on a pour p entier naturel non nul donné

$$V_{2p}(1) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{2p} W_k = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p} W_{2k-1}W_{2k} = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)} = \frac{\pi^p}{p!}.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ V_{2p}(1) = \frac{\pi^p}{p!} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall R > 0,\ V_{2p}(R) = \frac{\pi^pR^{2p}}{p!}.$$

La formule donnant $V_{2p+1}(R)$ est moins jolie et n'est pas donnée ici.

