Intégrales de Wallis

John Wallis, mathématicien anglais, est né en 1616 et est mort en 1703. Wallis est donc antérieur à Newton.

1) Définition.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\ dt.$$

W_n existe pour tout entier naturel n car la fonction $t \mapsto \sin^n t$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2) Autres expressions de W_n.

Le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - t$ fournit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\ dt.$$

Soit ε un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. La fonction $u \mapsto \operatorname{Arcsin} u = t$ est de classe C^1 sur $[0, \operatorname{Arcsin}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)]$ et on peut poser $t = \operatorname{Arcsin} u$ ou encore $u = \sin t$ pour obtenir $\displaystyle\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n t\ dt = \int_0^{\operatorname{Arcsin}(\pi/2-\varepsilon)} \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$. Quand ε tend vers 0 par valeurs supérieures, $\displaystyle\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n t\ dt$ tend vers W_n et il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\operatorname{Arcsin}(\pi/2-\varepsilon)} \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$ de sorte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du$ converge. Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}$ est positive sur $[0, 1[$, on en déduit que cette fonction est intégrable sur $[0, 1[$. Quand ε tend vers 0, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ du.$$

On peut aussi poser $u = \sin t$ dans l'intégrale définissant W_{2n+1} pour obtenir

$$W_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^n \cos t\ dt = \int_0^1 (1-u^2)^n\ du.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \int_0^1 (1-u^2)^n\ du.$$

3) Sens de variation de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel t de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \sin t < 1$ et en multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif $\sin^n t$, on obtient $0 < \sin^{n+1} t < \sin^n t$.
Puisque les trois membres de cet encadrement sont des fonctions continues sur $[0, 1]$ les inégalités strictes sont préservées par intégration et on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < W_{n+1} < W_n$.

La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.

4) Limite.

1ère idée. On montre « à la main » que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit a un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout naturel n, on a

$$0 \leq W_n = \int_0^a \sin^n t\ dt + \int_a^{\pi/2} \sin^n t\ dt \leq a \sin^n a + (\frac{\pi}{2} - a).$$

On choisit alors a dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ de sorte que $0 < \frac{\pi}{2} - a < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $0 \leq W_n \leq a \sin^n a + \frac{\varepsilon}{2}$.
Maintenant, puisque a est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin a$ est dans $]0, 1[$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a \sin^n a = 0$.

Il existe ainsi un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $a\sin^n a < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $W_n < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq W_n < \varepsilon)$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = 0.$$

2ème idée. On utilise le théorème de convergence dominée pour atteindre le même but.
Pour $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = \sin^n t$ (avec la convention usuelle $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, $f_0(t) = 1$).

- Chaque fonction f_n est intégrable sur le segment $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ car continue sur ce segment.
- La suite de fonction f_n converge simplement sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ vers la fonction f définie par : $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \text{ si } t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

  De plus, f est continue par morceaux sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, $|f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue et intégrable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} W_n = \int_0^{\pi/2} f(t)\ dt = 0$.

3ème idée. L'équivalent de W_n obtenu en 11) fournit en particulier $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$.

5) Premières valeurs.
$W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\ dt = 1$.

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.$$

6) Relation de récurrence.

Soit n un entier naturel. Les deux fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ sont de classe C^1 sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1} t\ dt = \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t\ dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)\sin^n t\ dt = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \text{ ou encore } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

7) Calcul de W_n.
Soit p un entier naturel non nul.

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{(2p)(2p-2)\ldots 2} W_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots 1}{((2p)(2p-2)\ldots 2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2} = \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{(2p)(2p-2)\ldots 2}\frac{\pi}{2} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2}.$$

De même, si p un entier naturel non nul,

$$W_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\ldots 2}{(2p+1)(2p-1)\ldots 1} W_1 = \frac{((2p)(2p-2)\ldots 2)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\ldots 1} = \frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ W_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}.$$

8) W_{n+1} est équivalent à W_n.

D ?après 3), la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante. Donc, pour tout naturel n, on a $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$. Après division par le réel strictement positif W_n ($W_n > 0$ car W_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient d ?après 6)

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{W_n}{W_n} = 1.$$

Quand n tend vers l ?infini, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ ou encore

$$W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.$$

9) Formule de WALLIS.

D'après 8), $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = 1$. D'autre part, d'après 7), $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \frac{(2\times 4\times\dots\times(2p))^2}{(3\times 5\times\dots\times(2p-1))^2}\frac{2}{(2p+1)\pi}$. On obtient ainsi une première version de la formule de WALLIS

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{p\to+\infty} \sqrt{p}\frac{1\times 3\times\dots\times(2p-1)}{2\times 4\times\dots\times(2p)}.$$

ou encore, en élevant au carré et après simplification, on obtient (avec une formulation médiocre car les produits apparaissant au numérateur et au dénominateur sont divergents) :

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times\dots}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times\dots}.$$

10) La suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

D ?après 6), pour tout entier naturel n, on a $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et donc $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}$. Ainsi, la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc, pour tout entier naturel n, $(n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

11) Equivalent simple de W_n quand n tend vers $+\infty$.

D ?après 8), $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ et donc, d ?après 10),

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2.$$

Puisque $W_n > 0$, on en déduit que

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

