Les intégrales de Fresnel

On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\,dt,\ J = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\,dt \text{ et } K = \int_0^{+\infty} e^{\left(it^2\right)}\,dt.$$

On suppose connue la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$.

• La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,1]$. De plus, pour tout $u \in]0,1]$, $\left|\dfrac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right| = \dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$. Puisque $\dfrac{1}{2} < 1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1]$ et donc la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ est une intégrale convergente.

• Soit $A > 1$. Les deux fonctions $u \mapsto -ie^{iu}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_1^{A} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du = \left[-ie^{iu} \times \frac{1}{\sqrt{u}}\right]_1^A - \int_1^A \frac{ie^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\,du = -\frac{ie^{iA}}{\sqrt{A}} + ie^{i} - \frac{i}{2}\int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du \quad (*).$$

Ensuite, pour $A > 1$, $\left|-\dfrac{ie^{iA}}{\sqrt{A}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$. Puisque $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{A}} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{ie^{iA}}{\sqrt{A}} = 0$. En particulier, la fonction $A \mapsto -\dfrac{ie^{iA}}{\sqrt{A}}$ converge en $+\infty$.

$\dfrac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} \underset{u\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\right)$. Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du$ ou encore la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_1^{A} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge en $+\infty$.

L'égalité $(*)$ montre alors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ puis que

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du \text{ est convergente.}$$

2) Existence de I, J et K.

La fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. La fonction $u \mapsto \sqrt{u} = t$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, strictement croissante sur $]0,+\infty[$, bijective de $[0,+\infty[$ sur lui-même. En posant $t = \sqrt{u}$, on obtient la convergence de l'intégrale K et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{\left(it^2\right)}\,dt$.

On en déduit encore la convergence des intégrales $I = \mathrm{Re}(K)$ et $J = \mathrm{Im}(K)$.

$$\text{Les intégrales } I = \int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\,dt,\ J = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\,dt \text{ et } K = \int_0^{+\infty} e^{\left(it^2\right)}\,dt \text{ sont convergentes.}$$

3) Calcul de K, I et J.

a) Définition et continuité de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(t^2+i\right)}}{t^2+i}\,dt$.

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(t^2+i\right)}}{t^2+i}\,dt$. On pose également $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2\left(t^2+i\right)}}{t^2+i} \end{array}$ de sorte que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

• Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$,

$$|f(x,t)| = \frac{\left|e^{-x^2t^2-ix^2}\right|}{|t^2+i|} = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi_0(t).$$

De plus, φ_0 est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ car φ_0 est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i}\,dt$.

• Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. Pour tout $x \in [a,A]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après a).

• f admet sur $[a,A] \times [0,+\infty[$ une dérivée par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x,t) \in [a,A] \times [0,+\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2+i)}.$$

De plus,

- pour tout $x \in [a,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
- pour tout $(x,t) \in [a,A] \times [0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2x\left|e^{-x^2t^2-it^2}\right| = 2xe^{-x^2t^2} \leqslant 2Ae^{-a^2t^2} = \varphi_1(t)$$

où φ_1 est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ car φ_1 est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, F est de classe C^1 sur $[a,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $(a,A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < A$, on a montré que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2+i)}\,dt.$$

Ensuite, pour $x > 0$, $F'(x) = -2e^{-ix^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2}\,x dt = -2e^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = -\frac{2e^{-ix^2}}{\sqrt{\pi}}$. On note alors que $F \in C^0([0,+\infty[,\mathbb{C}) \cap C^1(]0,+\infty[,\mathbb{C})$ et de plus, F' a une limite dans $\mathbb{C}$ quand x tend vers 0, à savoir $-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et

$$\forall x \geqslant 0,\ F'(x) = -\frac{2e^{-ix^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

c) Une autre intégrale égale à $\overline{K}$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx = \overline{K}$ existe puis

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx = \int_0^{+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) \quad (**).$$

Pour $x > 0$,

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\left|e^{-x^2t^2-it^2}\right|}{|t^2+i|}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(xt)^2}}{\sqrt{t^4+1}}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{du}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}=0$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$. D'autre part, $F(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+i}$. L'égalité $(**)$ fournit alors $-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ix^2}\,dx=-F(0)$ puis

$$\int_0^{+\infty}e^{-ix^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+i}.$$

d) Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+i}$ puis de I, J et K.

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+i}=\int_0^{+\infty}\frac{(t^2-i)}{(t^2+i)(t^2-i)}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2-i}{t^4+1}\,dt$. Le changement de variables $u=\dfrac{1}{t}$ fournit

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\times-\frac{du}{u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{u^4+1}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,dt$$

et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+i}=(1-i)\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}$ $(***)$. Ensuite,

$$2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^4+1}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt.$$

De plus, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
\frac{t^2+1}{t^4+1}&=\frac{t^2+1}{t^4+2t^2+1-2t^2}=\frac{t^2+1}{(t^2+1)^2-\left(\sqrt{2}t\right)^2}=\frac{t^2+1}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}\\
&=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)+\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)dt\\
&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}t+1\right)+\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}t-1\right)\right]_0^{+\infty}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Mais alors $(***)$ fournit $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ix^2}\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$ puis par conjugaison $K=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}(1+i)$ et enfin, par passage aux parties réelles et imaginaires, $I=J=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

$$\int_0^{+\infty}e^{\left(it^2\right)}\,dt=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1+i)\quad\text{et}\quad\int_0^{+\infty}\cos\left(t^2\right)\,dt=\int_0^{+\infty}\sin\left(t^2\right)\,dt=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

