L'intégrale de DIRICHLET

On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

1) Existence de I.

Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto 1-\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \frac{1-\cos(A)}{A} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt \quad (*).$$

• On fixe momentanément $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ sont continues sur $]0, A]$.

Ensuite, $\dfrac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon^2/2}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$. D'autre part, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 puis cette fonction est intégrable sur un voisinage de 0. Par suite, $\displaystyle\int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$ est une intégrale convergente.

$(*)$ montre alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est une intégrale convergente (ce qui est d'ailleurs immédiat puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0) et quand ε tend vers 0, on obtient

$$\forall A > 0,\ \int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt \quad (**).$$

• Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $A > 0$, $\left|\dfrac{1-\cos(A)}{A}\right| \leqslant \dfrac{2}{A}$ et donc, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1-\cos(A)}{A} = 0$. D'autre part, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$ est une intégrale convergente.

$(**)$ montre alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est une intégrale convergente. De plus, quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$.

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \text{ est convergente.}$$

On a au passage obtenu une égalité qui en fournit une autre en posant $u = \dfrac{t}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2}\,2du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt.$$

2) L'intégrale I est semi-convergente.

Vérifions que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$ ou encore que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,dt = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,dt \geqslant \int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(u+k\pi)|}{u+k\pi}\,du = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u+k\pi}\,du$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{\pi+k\pi}\,du = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,dt \geqslant +\infty$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,dt = +\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ n'est pas absolument convergente.

3) Calcul d'une suite d'intégrales.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est convergente car la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et est prolongeable par continuité en 0.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(t)\cos((2n+2)t)}{\sin(t)}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2n+2)t)\,dt$$
$$= 2\left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Donc, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\sin(t)}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t)}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

4) Une autre suite d'intégrales qui va tendre vers I.

Puisque $\dfrac{1}{\sin(t)}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0, l'essentiel de la valeur de l'intégrale J_n est fournie par les valeurs de t proche de 0. Or, $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$. On considère donc pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt$.

En posant $u = (2n+1)t$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(u)}{u}\,du.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est une intégrale convergente ou encore puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ existe et vaut I, on a en particulier

$$I = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} I_n.$$

5) Le lemme de Lebesgue pour les fonctions de classe C^1.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrons que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$.

Une intégration par parties fournit pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &= \left|\left[-f(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\,dt\right| \\ &= \frac{1}{\lambda}\left|-f(b)\cos(\lambda b) + f(a)\cos(\lambda a) + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right).\end{aligned}$$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$.

6) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}$.

Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$. f est de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$f(t) = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3/6}{t^2} = \frac{t}{6} \underset{t\to 0}{\to} 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f le prolongement obtenu). Ensuite, pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(t) = \frac{-\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sin^2(t) - t^2\cos(t) &\underset{t\to 0}{=} \left(t - \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right)^2 - t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) \underset{t\to 0}{=} \left(t - \frac{t^3}{6}\right)^2 - t^2\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) + o\left(t^4\right) \\ &\underset{t\to 0}{=} t^4\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + o\left(t^4\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{t^4}{6} + o\left(t^4\right)\end{aligned}$$

et donc $f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^4/6}{t^4} = \frac{1}{6}$. Ainsi, $f \in C^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right) \cap C^1\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ et f' a une limite réelle en 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $f \in C^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$.

7) Limite de $J_n - I_n$ et calcul de I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après 3),

$$\frac{\pi}{2} - I_n = J_n - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)\sin((2n+1)t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin((2n+1)t)\,dt.$$

D'après 6), f est de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc, d'après le lemme de Lebesgue, $\frac{\pi}{2} - I_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors, d'après 4),

$$I = \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

On a montré que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

