# Etude de la fonction $\zeta$ de Riemann

## 1) Définition

Pour $x$ réel donné, la série de terme général $\dfrac{1}{n^x}$, $n \geqslant 1$, converge si et seulement si $x > 1$.

La fonction zeta de Riemann est la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x > 1,\ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

**Remarque.** Pour $z$ complexe et $n$ naturel non nul donnés, $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| = \left|\dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)\ln n}}\right| = \dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$. Par suite, la série de terme général $\dfrac{1}{n^z}$ converge absolument si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 1$.

## 2) La fonction $f\ :\ x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

Pour $x$ réel et $n$ entier naturel non nul donnés, posons $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

- Si $x \leqslant 0$, la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et la série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $x > 0$, la suite $((-1)^{n-1}u_n(x))_{n\geqslant 1}$ est de signe constant et tend vers $0$ en décroissant. La série de terme général $u_n(x)$ converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$, $n \geqslant 1$, converge si et seulement si $x > 0$.

## 3) Une relation entre $\zeta$ et $f$.

Soit $x$ un réel strictement supérieur à $1$. $\zeta(x)$ et $f(x)$ existent et

$$\zeta(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} = \frac{1-(-1)^{2p-1}}{(2p)^x} = \frac{2}{2^x}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^x} = 2^{1-x}\zeta(x).$$

Donc, $f(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$ ou encore

$$\forall x > 1,\ \zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} f(x).$$

## 4) Continuité de $\zeta$ sur $]1, +\infty[$.

Soit $a$ un réel strictement supérieur à $1$ donné.

Pour $n \geqslant 1$ donné, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $[a, +\infty[$. De plus , pour tout réel $x$ de $[a, +\infty[$, $\left|\dfrac{1}{n^x}\right| = \dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^a}$ avec égalité pour $x = a$ ou encore

$$\sup\left\{\left|\frac{1}{n^x}\right|,\ x \in [a, +\infty[\right\} = \frac{1}{n^a}.$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^a}$ converge (série de Riemann d'exposant $a > 1$), la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$, $n \geq 1$, est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. La somme $\zeta$ est donc continue sur $[a, +\infty[$ en tant que limite uniforme sur $[a, +\infty[$ d'une suite de fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel $a$ de $]1, +\infty[$, on a montré que

la fonction $\zeta$ est continue sur $]1, +\infty[$.

 

**5) Continuité de $f$ sur $]0,+\infty[$.**

L'égalité du 3) et la continuité de $\zeta$ sur $]1,+\infty[$ montre déjà que $f$ est continue sur $]1,+\infty[$. Montrons que $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $a$ un réel strictement positif donné. Pour $x$ réel supérieur ou égal à $a$ et $n$ entier naturel non nul donnés, posons

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p^x} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}.$$

On rappelle que la série de terme général $\dfrac{(-1)^p}{p^x}$ est alternée et d'après une majoration classique du reste d ?ordre $n$ d'une série alternée (à savoir que la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue de son premier terme) on a

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Donc, la fonction $R_n$ est bornée sur $[a,+\infty[$ et pour tout naturel non nul $n$,

$$\sup\{|R_n(x)|,\ x \in [a,+\infty[\} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Comme $a > 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup\{|R_n(x)|,\ x \in [a,+\infty[\} = 0$. On a ainsi montré que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$, $n \geqslant 1$, est uniformément convergente sur $[a,+\infty[$. Comme chacune de ces fonctions est continue sur $[a,+\infty[$, la somme $f$ est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel $a$ de $]0,+\infty[$, on a montré que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } ]0,+\infty[.}$$

**6) Sens de variation de la fonction $\zeta$.**

Chacune des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$. Donc, la fonction $\zeta$ est décroissante sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de fonctions décroissantes sur $]1+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est décroissante sur } ]1,+\infty[.}$$

**7) Convexité de la fonction $\zeta$.**

Chacune des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est convexe sur $]1,+\infty[$ (en effet, pour $n$ entier naturel non nul donné, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$ et de plus $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)'' = \dfrac{(-\ln n)^2}{n^x} \geqslant 0$). Donc $\zeta$ est convexe sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de fonctions convexes sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\zeta \text{ est convexe sur } ]1,+\infty[.}$$

**Remarque.** Si on sait qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle, on retrouve la continuité de $\zeta$ sans recours à une convergence uniforme.

**8) Etude de la fonction $\zeta$ au voisinage de $+\infty$.**

**a) Limite de $\zeta(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.** D'après 4), la série de fonctions de somme $\zeta$ converge uniformément vers $\zeta$ sur $[2,+\infty[$. De plus, chacune des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ admet une limite réelle quand $x$ tend vers $+\infty$ à savoir

$$\ell_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Le théorème d'interversion des limites permet alors d'affirmer que la fonction $\zeta$ a une limite réelle quand $x$ tend vers $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

 

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1.}$$

**b) Un équivalent de $\zeta(x)-1$ quand $x$ tend vers $+\infty$.** Pour $x\in]1,+\infty[$, $2^x(\zeta(x)-1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x$. Maintenant, pour $x\in[2,+\infty[$ et $n\geqslant 2$

$$0<\left(\frac{2}{n}\right)^x\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^2=\frac{4}{n^2},$$

Comme la série de terme général $\frac{4}{n^2}$, $n\geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général $x\mapsto\left(\frac{2}{n}\right)^x$ converge normalement et donc uniformément sur $[2,+\infty[$. Puisque chaque fonction $x\mapsto\left(\frac{2}{n}\right)^x$ a une limite réelle quand $x$ tend vers $+\infty$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty}2^x(\zeta(x)-1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x=1+0+0+\ldots=1.$$

On a montré que quand $x$ tend vers $+\infty$, $\zeta(x)-1\sim 2^{-x}$ ou encore que

$$\boxed{\zeta(x)\underset{x\to+\infty}{=}1+2^{-x}+o\left(2^{-x}\right).}$$

**9) Etude au voisinage de 1.**

**a) Limite de $\zeta$ quand $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures.** D'après 6), la fonction $\zeta$ est décroissante sur $]1,+\infty[$. Par suite, quand $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures, $\zeta$ admet une limite $\ell$ élément de $]-\infty,+\infty]$. Déterminons alors $\ell$.

Soit $N$ un entier naturel non nul donné. Pour tout réel $x\in]1,+\infty[$, on a

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}.$$

Quand $x$ tend vers 1, on obtient $\ell\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$, cette inégalité étant vraie pour tout naturel non nul $N$. On en déduit que

$$\ell\geqslant\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=+\infty.$$

On a montré que

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\zeta(x)=+\infty.}$$

**b) Equivalent de $\zeta$ quand $x$ tend vers 1.**

**Première solution (comparaison avec une intégrale).** Soit $x\in]1,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$. Donc

$$\forall n\geqslant 1,\ \int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,dt\leqslant\frac{1}{n^x}\ \text{et}\ \forall n\geqslant 2,\ \frac{1}{n^x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^x}\,dt.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\geqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x}\,dt=\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{x-1},$$

et

 

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt = 1 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \frac{1}{x-1} + 1,$$

Ainsi,

$$\forall x > 1,\ \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1.$$

Le théorème des gendarmes montre alors que $(x-1)\zeta(x)$ tend vers $1$ quand $x$ tend vers $1$ et donc que

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1, x>1}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$$

**Deuxième solution (utilisation de la fonction $f$).** On a vu au 3) que pour $x > 1$, $\zeta(x) = \dfrac{f(x)}{1-2^{1-x}}$. D ?après 5), $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc en $1$. Par suite,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

D'autre part, quand $x$ tend vers $1$,

$$1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln(2)} \underset{x\to 1,\ x>1}{\sim} -(1-x)\ln 2 = (x-1)\ln 2,$$

et donc

$$\zeta(x) \underset{x\to 1,\ x>1}{\sim} \frac{\ln 2}{\ln 2(x-1)}.$$

et on retrouve

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1, x>1}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$$

**10) Dérivées successives.** Soit $a$ un réel strictement plus grand que $1$ donné.
Chaque fonction $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$, $n \geqslant 1$, est de classe $C^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et pour $x \geqslant a$, $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

De plus, pour tout $x \in [a,+\infty[$, tout $k \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Montrons que la série numérique de terme général $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$converge. Quand $n$ tend vers $+\infty$

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{(1+a)/2} = \frac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

(car $\dfrac{a-1}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées) et donc, quand $n$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^{(a+1)/2}}\right)$ avec $\dfrac{a+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$. Ainsi, la série numérique de terme général $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge.

On en déduit que, pour $k \geqslant 1$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$. En résumé,

- la série de fonctions de terme général $f_n$ converge simplement vers $\zeta$ sur $[a,+\infty[$,
- chaque $f_n$, $n \geqslant 1$, est de classe $C^\infty$ sur $[a,+\infty[$
- pour tout naturel non nul $k$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

 

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction $\zeta$ est de classe $C^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $a$ élément de $]1, +\infty[$, on a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]1,+\infty[ \text{ et } \forall x \in ]1,+\infty[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln^k n}{n^x}.}$$

**Remarques.**

1) La fonction $\zeta$ est de classe $C^1$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout réel $x$ de $]1, +\infty[$, $\zeta'(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} < 0$ et on retrouve le fait que $\zeta$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

2) La fonction $\zeta$ est de classe $C^2$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout réel $x$ de $]1, +\infty[$, $\zeta''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^x} > 0$ et on retrouve le fait que $\zeta$ est convexe sur $]1, +\infty[$.

**11) Graphe .**