La fonction Γ d'EULER

1) Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. La fonction $f\ :\ t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Etude en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $t^2 \times t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Etude en 0. $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x-1}$ et donc la fonction f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $x - 1 > -1$ ce qui équivaut à $x > 0$.

Finalement, $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

2) Relation fonctionnelle.

Soit $x > 0$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^A t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Puisque $x > 0$ et donc $x + 1 > 0$, quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\forall x > 0,\ \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3) Quelques valeurs.

• En particulier, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$. De plus, $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$. Par récurrence, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!.$$

• Calculons aussi $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pose $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ et $dt = 2u\,du$ et on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\,2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi} \text{ (intégrale de Gauss).}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La relation fonctionnelle du 2) permet encore d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \dfrac{1}{2}\right)$ et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n) \times (2n-1) \times \ldots \times 3 \times 2}{2^n(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 2}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!},$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}.$$

4) Continuité. Soit a et A deux réels tels que $0 < a < A$. Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} [a, A] \times]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
• pour chaque $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $[a, A]$,
• Soit $(x, t) \in [a, A] \times]0, +\infty[$. Si $0 < t \leqslant 1$, alors $|t^{x-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{a-1}e^{-t}$ et si $t \geqslant 1$, $|t^{x-1}e^{-t}| \leqslant t^{A-1}e^{-t}$. On en déduit que

$$\forall (x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[,\ |\Phi(x,t)| \leqslant t^{a-1}e^{-t} + t^{A-1}e^{-t} = \varphi_0(t).$$

D'après le 1), la fonction φ_0 est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues par morceaux et intégrables sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction Γ est continue sur $[a,A]$. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que

La fonction Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

5) Dérivation.

a) Dérivée première. On reprend les notations de 4).

• Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
• La fonction ϕ admet sur $[a,A]\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}.$$

De plus,

- pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
- pour chaque $(x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant (\ln t)(t^{a-1} + t^{A-1})e^{-t} = \varphi_1(t)$.

Vérifions alors l'intégrabilité de la fonction φ_1 sur $]0,+\infty[$. Pour cela, pour $\alpha > 0$ donné, vérifions l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto (\ln t)t^{\alpha-1}e^{-t}$ sur $]0,+\infty[$. Cette fonction est

∗ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
∗ négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées,
∗ négligeable en 0 devant $t^{-1+\frac{\alpha}{2}}$ avec $-1+\dfrac{\alpha}{2} > -1$ car $t^{1-\frac{\alpha}{2}} \times (\ln t)t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{\alpha/2}(\ln t) \underset{t\to 0}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

On en déduit que la fonction $t \mapsto (\ln t)t^{\alpha-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et il en est de même de la fonction φ_1.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction Γ est de classe C^1 sur $[a,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que

La fonction Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

b) Dérivées successives.

• Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
• La fonction ϕ admet sur $[a,A]\times]0,+\infty[$ des dérivées partielles à tout ordre par rapport à sa première variable x définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$

De plus, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$,

- pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
- pour chaque $(x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant (\ln t)(t^{a-1} + t^{A-1})e^{-t} = \varphi_1(t)$.

Enfin, les fonctions φ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont intégrables sur $]0,+\infty[$ pour les mêmes raisons que la fonction φ_1.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction Γ est de classe C^∞ sur $[a,A]$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que

La fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

6) Convexité.

D'après 5), la fonction Γ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\ dt > 0$ (intégrable d'une fonction continue positive et non nulle). Donc

La fonction Γ est strictement convexe sur $]0,+\infty[$.

7) Variations.

Puisque la fonction Γ'' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus,
- la fonction Γ est continue sur $[1,2]$,
- la fonction Γ est dérivable sur $]1,2[$,
- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$,

et le théorème de Rolle permet d'affirmer qu'il existe $x_0 \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Puisque la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, la fonction Γ' est strictement négative sur $]0,x_0[$ et strictement positive sur $]x_0,+\infty[$. On a montré que

$\exists x_0 \in]1,2[/$ la fonction Γ est strictement décroissante sur $]0,x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0,+\infty[$.

8) Etude en $+\infty$.

Puisque la fonction Γ est croissante sur $52,+\infty[$, pour $x \geqslant 3$, $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \geqslant (x-1)\Gamma(2) = x-1$ et on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

De plus, pour $x > 1$, $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On en déduit que la courbe représentative de la fonction Γ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty.$$

9) Etude en 0.

Pour $x > 0$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{x\to0}{\Rightarrow} \Gamma(1) = 1$ par continuité de la fonction Γ en 1. Donc

$$\lim_{x\to0^+} \Gamma(x) = 0 \text{ et de plus } \Gamma(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

10) Graphe.