

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est constituée de six exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations

Dans tout le sujet, nous utiliserons les notations suivantes :

- i désigne l'unique nombre complexe tel que $e^{i\pi} = -1$.
- $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X .
- $V(X)$ désigne la variance mathématique d'une variable aléatoire réelle X .
- $M_{p,q}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Pour une matrice $M \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, on notera M^T la matrice transposée de M .
- Pour tout sous-espace F d'un espace euclidien E , $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans E et le produit scalaire de deux vecteurs x et y de F sera noté $\langle x, y \rangle$.

Exercice 1

Soient $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$. Nous nous intéressons à la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
2. (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On note $S(x)$ sa somme.
(b) Montrer que $S(x)$ est solution de $y' = \frac{1+2x}{1-x} y$.
(c) En déduire une expression de $S(x)$.

Exercice 2

Considérons f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer la valeur de la constante.
3. Dédire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4. En déduire que l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$ vaut 1.
5. Considérons la fonction φ suivante :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

- (a) Montrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- (b) Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
- (c) En déduire l'expression de $\varphi(x)$.

Exercice 3

Une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq M, \quad \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est de Cauchy.

Dans la suite de l'exercice, $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. On notera 0_E la fonction identiquement nulle de E . On définit enfin l'application N de E dans $\mathbb{R}^+$ par

$$N(f) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

2. (a) Démontrer pour tous nombres complexes u et v l'inégalité $|uv| \leq \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}$ et en déduire que pour toutes fonctions $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{\lambda^2}{2} N(f)^2 + \frac{1}{2\lambda^2} N(g)^2.$$

- (b) En déterminant le minimum de la fonction $h: \lambda \mapsto \frac{\lambda^2}{2} N(f)^2 + \frac{1}{2\lambda^2} N(g)^2$, montrer l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx \leq N(f)N(g).$$

- (c) En déduire que N est une norme sur E .
3. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E donnée par $g_n(x) = e^{inx}$. Montrer que $N(g_n - g_p) = 2\sqrt{\pi}$.
 4. En déduire que la boule fermée centrée en 0_E , de rayon 1 pour la norme N n'est pas compacte.

Exercice 4

Dans ce problème d'estimation, on dispose de n ($n \geq 2$) observations indépendantes $(X_1, \dots, X_n)$ de même loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu. On souhaite estimer $e^{-\theta}$.

Pour rappel, X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}.$$

On dit que $\hat{\lambda}$ est un estimateur sans biais d'une quantité λ si $\hat{\lambda}$ est une variable aléatoire fonction de l'échantillon, c'est à dire $\hat{\lambda} = f(X_1, \dots, X_n)$ pour une certaine fonction f , et si $\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \lambda$. Pour deux estimateurs sans biais de λ , on préférera celui dont la variance est la plus petite.

On définit, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire Y_i par

$$\begin{cases} Y_i = 1, & \text{si } X_i = 0, \\ Y_i = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note enfin $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{Y}_n$.
2. Soit, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. On définit $\varphi_n(j) = \mathbb{P}_{S_n=j}(X_n = 0)$ la probabilité conditionnelle de $\{X_n = 0\}$ sachant $\{S_n = j\}$.
 - (a) Montrer que S_k suit une loi de Poisson de paramètre $k\theta$.
 - (b) Montrer que pour tout entier naturel j , $\varphi_n(j) = (1 - \frac{1}{n})^j$.

La valeur $\varphi_n(j)$ étant indépendante de θ , on s'intéresse à l'estimateur $\varphi_n(S_n)$.

3. Calculer l'espérance et la variance de $\varphi_n(S_n)$.
4. Montrer que $1 \leq \frac{e^\theta - 1}{\theta} \leq e^\theta$ et en déduire que la fonction h donnée par $h(\theta) = \frac{e^\theta - 1}{\theta}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Montrer enfin que $V(\varphi_n(S_n)) \leq V(\bar{Y}_n)$. Interpréter le résultat au regard du problème d'estimation considéré.

Exercice 5

Considérons une production industrielle d'allumettes. A la fin d'une journée donnée, on souhaiterait évaluer la proportion d'allumettes défectueuses sur le total des t allumettes produites. On notera d le nombre d'allumettes défectueuses. Le tirage aléatoire d'un échantillon de n allumettes parmi les t disponibles est effectué, et chacune d'entre elles est grattée pour vérifier si elle s'allume ou pas. C'est le seul critère de conformité considéré ici. On suppose $t \geq d \geq 2$.

1. En considérant le polynôme $P(X) = (1 + X)^{k+\ell}$, démontrer la formule de Vandermonde :

$$\binom{k+\ell}{m} = \sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\ell}{m-j}.$$

2. Montrer que la loi de la variable aléatoire X correspondant au nombre d'allumettes défectueuses dans le prélèvement est donnée par

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{d}{k} \binom{t-d}{n-k}}{\binom{t}{n}}.$$

3. Montrer la relation suivante : $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \binom{d}{k} = d \binom{d-1}{k-1}$.
4. Dédurre des questions précédentes que l'espérance $\mathbb{E}[X]$ vaut $n \frac{d}{t}$.

On admet que la variance de X est donnée par $n \frac{d}{t} \frac{t-d}{t} \frac{t-n}{t-1}$.

5. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
6. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en supposant $\alpha, \beta \in [0, 1]$ fixés, sachant aussi que $p = \frac{d}{t}$ est inconnu, établir une taille suffisante n de l'échantillon, fonction de α, β et t , pour assurer le contrôle d'erreur d'estimation suivant :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{d}{t}\right| \geq \alpha\right) \leq \beta.$$

7. Nous voulons étudier le comportement de la loi de X lorsque t est très grand. Supposons n et $p = \frac{d}{t}$ fixés. Notons X_t la variable correspondant au nombre d'allumettes défectueuses dans un échantillon choisi au hasard dans une population de t allumettes contenant une proportion p d'allumettes défectueuses. Montrer que lorsque t tend vers l'infini, la loi de X_t tend vers une loi usuelle dont on précisera les paramètres.

Exercice 6

Soit E un espace euclidien, p un projecteur orthogonal de E . Pour rappel, un endomorphisme f est dit symétrique si pour tout couple (x, y) de E ,

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle.$$

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors p est un endomorphisme symétrique.
2. Soit q un autre projecteur orthogonal de E . Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
3. Pour cette question seulement, on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on note (e_1, e_2, e_3) sa base canonique : soit p la projection orthogonale sur la droite engendrée par e_1 et q la projection orthogonale sur la droite engendrée par $e_1 + e_2$. Calculer $p \circ q(e_1)$. L'application $p \circ q$ est-elle une projection ?
4. Montrer que $(\text{Im } p + \text{Ker } q)^\perp = \text{Ker } p \cap \text{Im } q$.
5. Montrer alors que $\text{Im } p \circ q = \text{Im } p \circ q \circ p$.
6. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $[0, 1]$.
7. Montrer que les sous-espaces propres E_λ associés aux valeurs propres non-nulles λ de $p \circ q \circ p$ sont aussi ceux de $p \circ q$.
8. Montrer alors que $p \circ q$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $[0, 1]$.