

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE  
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE  
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE  
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ET DE MANAGEMENT  
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**1<sup>ère</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

## **1 Problème d'Analyse**

### **Introduction**

Pour tout réel  $x > -1$ , on considère la série

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

On note, pour tout entier  $k \geq 2$ ,

$$\zeta(k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k},$$

la fonction Zéta de Riemann qui converge pour tout  $k \geq 2$ .

Le but de ce problème est d'étudier la fonction  $g$  : domaine de définition, régularité, développement limité en 0 à tout ordre, expression intégrale, comportement aux bornes de son ensemble de définition. Les parties **A**, **B**, **C** et **D** sont indépendantes.

## Partie A — Convergence et premières propriétés de $g$

**A.1.** Montrer que  $g$  est définie sur  $] -1; +\infty[$ .

**A.2.** Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son ensemble de définition et donner, pour tout entier  $k$  et tout réel  $x > -1$ , une expression de  $g^{(k)}(x)$  sous la forme d'une série.

**A.3.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Donner un développement limité de  $g$  à l'ordre  $m$  en 0. On exprimera les coefficients de ce développement en fonction des valeurs prises par la fonction  $\zeta$  définie dans l'introduction.

## Partie B - Equivalents de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.

**B.1.** a) Montrer que, pour tout  $x > 0$ , pour tout entier strictement positif  $k$ ,

$$\frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{(k+x)^2}.$$

b) Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{1+x} \leq g(x) \leq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}.$$

c) Déterminer un équivalent simple de  $g$  en  $+\infty$ .

**B.2.** Déterminer un équivalent simple de  $g$  en  $-1$ .

## Partie C — Une représentation intégrale de $g$ .

**C.1.** Montrer que, pour tout réel  $\alpha > 0$ ,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t) dt \text{ converge et } \int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t) dt = \frac{1}{\alpha^2}.$$

**C.2.** Montrer que pour tout  $x > -1$ ,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{n+x-1}(-\ln t) dt.$$

**C.3.** En déduire une expression intégrale de  $g(x)$ , autrement dit, déterminer une fonction  $h(x, t)$  telle que

$$g(x) = \int_0^1 h(x, t) dt.$$

## Partie D - Développement asymptotique de $g$ en $+\infty$ .

Dans la question **B.1**, on a trouvé un équivalent de  $g$  en  $+\infty$ . Le but de cette partie est de trouver le deuxième terme du développement asymptotique de  $g$  en  $+\infty$ . On note  $E(t)$  la partie entière de  $t$ . On considère  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ .

**D.1.** On définit les polynômes de Bernoulli comme l'unique suite de polynômes telle que :

- $B_0 = 1$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = (n+1)B_n$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x)dx = 0$ .

a) Déterminer  $B_1$  et  $B_2$ .

b) On pose pour le reste du problème  $\widetilde{B}_1(t) = B_1(t - E(t))$  et  $\widetilde{B}_2(t) = B_2(t - E(t))$ . Montrer que  $\widetilde{B}_1$  et  $\widetilde{B}_2$  sont 1-périodiques et continues.

**D.2.** Montrer que pour tout entier strictement positif  $k$ ,

$$\int_k^{k+1} \widetilde{B}_1 f' = \frac{1}{2} (f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} f.$$

**D.3.** En déduire que pour tout entier  $N \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^N f(k) = \int_1^N (f) + \frac{1}{2} (f(1) + f(N)) + \int_1^N \widetilde{B}_1 f'.$$

**D.4.** Montrer que  $\widetilde{B}_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et que sur cet ensemble,  $\widetilde{B}_2' = 2\widetilde{B}_1$ . En déduire que,

$$\int_k^{k+1} \widetilde{B}_1 f' = \frac{1}{12} (f'(k+1) - f'(k)) - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_2 f''.$$

**D.5.** Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^N f(k) = \int_1^N (f) + \frac{1}{2} (f(1) + f(N)) + \frac{1}{12} (f'(N) - f'(1)) - \frac{1}{2} \int_1^N \widetilde{B}_2 f''.$$

**D.6.** Soit  $x > -1$ . On considère la fonction  $f_x$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f_x(t) = \frac{1}{(t+x)^2}$ . Montrer que,

$$\int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2 f_x'' \text{ converge et que } \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2 f_x'' = O_{+\infty} \left( \frac{1}{x^3} \right).$$

**D.7.** En utilisant les deux questions **D.5** et **D.6**, déterminer des constantes réelles  $a$  et  $b$  telles que,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + O_{+\infty} \left( \frac{1}{x^3} \right).$$

## 2 Problème d'Algèbre

Le but de ce problème est de démontrer et d'appliquer deux théorèmes de diagonalisation simultanée. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

### Partie A : diagonalisation simultanée.

#### Notations et présentation de la partie A.

- $\mathbb{K}$  désigne le corps des réels ou celui des complexes,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .
- $\mathcal{L}(E)$  désigne l'algèbre des endomorphismes de  $E$  et l'application identité de  $E$  est noté  $\text{Id}_E$ .
- Si  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que  $F$  est stable par  $f$  si  $f(F) \subset F$ , et on note alors  $f|_F$  la restriction de  $f$  à  $F$ .
- Deux endomorphismes  $f$  et  $g$  commutent si  $f \circ g = g \circ f$ .
- Si  $\lambda$  est une valeur propre d'un endomorphisme  $f$ , on notera  $E_\lambda^f$  le sous espace propre associé ou simplement  $E_\lambda$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'endomorphisme en question.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'algèbre des matrices carrées de taille  $n$  et  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  désigne le groupe constitué des matrices inversibles.
- $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans cet ordre  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Le but de cette partie est de montrer et d'appliquer le théorème de diagonalisation simultanée suivant :

**Théorème I :** Si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $E$  diagonalisables et qui commutent, alors il existe une base commune de diagonalisation, autrement dit, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$  soient des matrices diagonales.

**A.1. Préliminaires :** soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Dans cette question nous démontrons les deux résultats de cours suivants :

- $f$  est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  simplement scindé tel que  $P(f) = 0$ .
  - La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous espace stable est diagonalisable.
- a) Supposons  $f$  diagonalisable et notons  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $f$  deux à deux distinctes. Montrer que le polynôme  $P(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$  vérifie  $P(f) = 0$ .
- b) Réciproquement, soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des éléments de  $\mathbb{K}$  deux à deux distincts tel que le polynôme simplement scindé  $P(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$  soit un polynôme annulateur de  $f$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.
- c) Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ , déduire des questions précédentes que si  $f$  est diagonalisable, alors  $f|_F$  est diagonalisable.

**A.2. Preuve du théorème I :** soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.

- a) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , alors  $E_\lambda^f$  est stable par  $g$ .
- b) En déduire le théorème I.

**A.3. Application 1 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ . Le but de cette question est de montrer que l'application  $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  définie par  $f_A(M) = AMA + MA$  est diagonalisable.

- a) Vérifier que  $f_A$  est linéaire.
- b) Notons  $g_A$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  défini par  $g_A(M) = AM$ . Montrer que si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , alors  $g_{P(A)} = P(g_A)$ .
- c) Montrer que  $g_A$  est diagonalisable.

On considère également l'endomorphisme  $d_A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  défini par  $d_A(M) = MA$  et, comme le raisonnement est analogue, on admet que  $d_A$  est diagonalisable.

- d) Montrer que  $g_A$  et  $d_A$  commutent.
- e) Conclure.

**A.4. Application 2 :** Soit  $p$  un entier positif impair et  $P \in \mathbb{R}[X]$  défini par  $P(X) = \sum_{k=1}^p \frac{X^k}{k}$ . Le

but de cette question est de montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices à coefficients réels diagonalisables dans  $\mathbb{R}$  et si  $P(A) = P(B)$  alors  $A = B$ .

- a) Montrer que la fonction polynômiale  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective.
- b) Soient  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $S \in \mathbb{R}[X]$  et  $W \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer en détaillant que :

$$S(D) = \text{diag}(S(\alpha_1), \dots, S(\alpha_n)) \text{ et } S(WDW^{-1}) = WS(D)W^{-1}.$$

- c) Soient  $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$  tous distincts et  $(y_1, \dots, y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ . Montrer que le polynôme

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{t - x_j}{x_i - x_j} \right) \text{ vérifie } Q(x_k) = y_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, \ell \rrbracket.$$

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices à coefficients réels diagonalisables dans  $\mathbb{R}$  et telles que  $P(A) = P(B)$ . D'après le théorème I, il existe donc deux matrices  $U, V$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  ainsi que deux matrices diagonales  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D \text{ et } V^{-1}BV = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta.$$

Il existe également, d'après la question **A.4.c)**, un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q(P(\mu_i)) = \mu_i$ .

- d) Montrer qu'il existe un polynôme  $R$  tel que  $R(B) = A$ .
- e) En déduire que  $A$  et  $B$  commutent.
- f) Conclure.

## Partie B : diagonalisation simultanée des matrices symétriques.

### Notations et présentation de la partie B.

- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la matrice  $A^T$  désigne sa transposée.
- On rappelle qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est définie positive si pour tout vecteur colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$X^T A X > 0.$$

- $\mathcal{S}_n$  est le sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques et  $\mathcal{S}_n^{++}$  désigne l'ensemble constitué des matrices symétriques définies positives.
- On note  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .
- La matrice d'un produit scalaire  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est notée :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) := (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Le but de cette partie est de montrer et d'appliquer le théorème de diagonalisation simultanée suivant :

**Théorème II :** Soient  $A \in \mathcal{S}_n^{++}$  et  $B \in \mathcal{S}_n$ . Alors, il existe une matrice inversible  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que

$$A = P^T I_n P = P^T P \text{ et } B = P^T D P.$$

**B.1. Preuve du théorème II :** Soient  $A \in \mathcal{S}_n^{++}$  et  $B \in \mathcal{S}_n$ . Notons  $\varphi$  le produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  pour  $\varphi$  et notons enfin  $Q = Q_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_c$  à  $\mathcal{B}$ .

- Donner une relation entre  $Q$  et  $A$ .
- Notons  $C = Q^T B Q$ . Montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $R$  et une matrice diagonale  $D$  telles que,

$$R^T D R = C.$$

- Déterminer une matrice  $P$  telle que,

$$A = P^T P \text{ et } B = P^T D P.$$

**B.2. Application :** Soient  $(A, B) \in (\mathcal{S}_n^{++})^2$ . Le but de cette question est d'utiliser le théorème II pour démontrer l'inégalité suivante :

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}. \quad (1)$$

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On rappelle que, par définition, une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si pour tous  $x, y \in I$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

- a) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. Montrer que pour tous  $x_1, \dots, x_n \in I$  et pour tous réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vérifiant  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

- b) Montrer que la fonction  $x \mapsto h(x) = \ln(1 + e^x)$  est convexe puis que pour tous réels strictement positifs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{1}{n}}.$$

- c) Montrer l'inégalité (1).