

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

• $a_1 = 1$ et donc $1 \leq a_1 \leq 1^2$. Ensuite, $a_2 = a_1 + \frac{2}{2}a_0 = 2$ puis $1 \leq a_2 \leq 4 = 2^2$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $1 \leq a_n \leq n^2$ et $1 \leq a_{n+1} \leq (n+1)^2$. Alors, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2}a_n \geq a_{n+1} \geq 1$ puis

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq (n+1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2 = \frac{(n+2)(n+1)^2 + 2n^2}{n+2} = \frac{(n+2)(n^2 + 2n + 1) + 2n^2}{n+2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 5n + 2}{n+2} \\ &\leq \frac{n^3 + 12n^2 + 6n + 8}{n+2} = \frac{(n+2)^3}{n+2} = (n+2)^2. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

2. (a) Pour tout $n \geq 1$, posons $b_n = 1$ et $c_n = n^2$. Pour tout $n \geq 1$, on a $|b_n| \leq |a_n| \leq |c_n|$ et donc $R_b \geq R_a \geq R_c$. On sait que $R_b = R_c = 1$ et on en déduit que $R_a = 1$.

(b) Pour $x \in]-1, 1[$, on peut poser $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. La fonction S est donc de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} (1-x)S'(x) - (1+2x)S(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (1+2x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \left(a_{n+1} - a_n - \frac{2}{n+1} a_{n-1} \right) x^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S'(x) = \frac{1+2x}{1-x} S(x)$.

(c) Pour tout $x \in]-1, 1[$, posons $a(x) = \frac{1+2x}{1-x} = \frac{3-2(1-x)}{1-x} = -2 + \frac{3}{1-x}$. Une primitive de la fonction a sur $] -1, 1[$ est la fonction $A : x \mapsto -2x - 3 \ln(1-x)$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, S'(x) &= a(x)S(x) \Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, e^{-A(x)} S'(x) - a(x) e^{-A(x)} S(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, (e^{-A} S)'(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, e^{-A(x)} S(x) = e^{-A(0)} S(0) \\ &\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, e^{-A(x)} S(x) = 1 \text{ (car } S(0) = a_0 = 1) \\ &\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, S(x) = e^{-2x-3 \ln(1-x)} \\ &\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x^2}.$$

Soit $A > 0$. Posons $\Phi : [-A, A] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que pour tout réel $x \in [-A, A]$, $g(x) = \int_0^1 \Phi(x, t) dt$.

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

Pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$.
 Pour chaque $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et de plus,

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, 1], \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus, pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$ puis, pour tout $(x, t) \in [-A, A] \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2A = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction g est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$, on a montré que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

2. Soit $x \neq 0$. En posant $u = xt$, on obtient

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Cette égalité reste vraie quand $x = 0$ car $g'(0) = 0$ et donc, pour tout réel x ,

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -(f^2)'(x).$$

Ainsi, $(f^2 + g)' = 0$ puis la fonction $f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, pour tout réel x ,

$$f^2(x) + g(x) = f^2(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3. Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$ puis $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)}$ (*). Maintenant, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2 \times 1}}{1} dt = e^{-x^2}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$ dans (*), on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale I :

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. En posant $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ (par parité)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h : t \mapsto \frac{e^{-itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de plus, $t^2|h(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} o(1)$ Mais alors, $|h(t)| \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque $2 > 1$, on en déduit que la fonction h est intégrable sur un voisinage de $-\infty$ et sur un voisinage de $+\infty$ et finalement sur $\mathbb{R}$. Par suite, $\varphi(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. On a montré que la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t) dt$.
 $(x, t) \mapsto \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après le début de la question. Ensuite, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = it \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|t|e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ où la fonction $t \mapsto \frac{|t|e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car négligeable en $\pm\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées).

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} it \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -i(-t + ix) \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt - x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad (\text{car les deux intégrales convergent}) \\ &= -i \left[\frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - x\varphi(x). \end{aligned}$$

Enfin, $\left| \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right| = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} 0$ et donc $-i \left[\frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Il reste

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -x\varphi(x).$$

(c) Mais alors, pour tout réel x , $\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0$ puis $e^{\frac{x^2}{2}}\varphi'(x) + xe^{\frac{x^2}{2}}\varphi(x) = 0$ puis $\left(e^{\frac{x^2}{2}}\varphi\right)'(x) = 0$. On en déduit encore que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{x^2}{2}}\varphi(x) = e^0\varphi(0) = 1$ et donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ qui est convergente. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$.

$$\|u_p - u_q\| = \|(u_p - \ell) - (u_q - \ell)\| \leq \|u_p - \ell\| + \|u_q - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon)$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de CAUCHY.

2. (a) Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. $0 \leq (|u| - |v|)^2 = |u|^2 - 2|uv| + |v|^2$ puis $|uv| \leq \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}$.

Soient $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx = \int_0^{2\pi} \left| \lambda f(x) \frac{g(x)}{\lambda} \right| dx \leq \int_0^{2\pi} \left(\frac{\lambda^2 |f(x)|^2}{2} + \frac{|g(x)|^2}{2\lambda^2} \right) dx = \frac{\lambda^2 N(f)^2}{2} + \frac{N(g)^2}{2\lambda^2}.$$

(b) Si $N(f) = 0$, alors $f = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) et l'inégalité à démontrer est claire. Supposons maintenant $N(f) > 0$.

Pour tout $\lambda > 0$, $\frac{\lambda^2 N(f)^2}{2} + \frac{N(g)^2}{2\lambda^2} = \frac{1}{2} \left(\lambda N(f) - \frac{N(g)}{\lambda} \right)^2 + N(f)N(g) \geq N(f)N(g)$ avec égalité effectivement obtenue

pour $\lambda = \sqrt{\frac{N(g)}{N(f)}} = \lambda_0$.

$$\text{Ainsi, } \int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{\lambda_0^2 N(f)^2}{2} + \frac{N(g)^2}{2\lambda_0^2} = N(f)N(g).$$

(c) N est une application de E dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, $N(f) \geq 0$ (positivité) puis, pour tout $f \in E$, $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ (axiome de séparation).

$$\text{Ensuite, pour tout } f \in E \text{ et tout } \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda f) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\lambda f(x)|^2 dx} = |\lambda| \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx} = |\lambda| N(f) \text{ (homogénéité)}.$$

Enfin, pour tout $(f, g) \in E^2$,

$$\begin{aligned} N(f+g)^2 &= \int_0^{2\pi} |f(x) + g(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} (|f(x)| + |g(x)|)^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + 2 \int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx + \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \\ &\leq N(f)^2 + 2N(f)N(g) + N(g)^2 = (N(f) + N(g))^2 \end{aligned}$$

et donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ (inégalité triangulaire).

On a montré que N est une norme sur E .

3. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq p$.

$$\begin{aligned} \|g_n - g_p\|^2 &= \int_0^{2\pi} |e^{inx} - e^{ipx}|^2 dx = \int_0^{2\pi} (e^{inx} - e^{ipx})(e^{-inx} - e^{-ipx}) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - e^{i(n-p)x} - e^{-i(n-p)x}) dx = 4\pi - 2 \int_0^{2\pi} \cos((n-p)x) dx = 4\pi - 2 \left[\frac{\sin((n-p)x)}{n-p} \right]_0^{2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

puis $\|g_n - g_p\| = 2\sqrt{\pi}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N \|g_n\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |e^{inx}|^2 dx} = \sqrt{2\pi}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{g_n}{\sqrt{2\pi}}$ est un élément de la boule fermée de centre 0_E et de rayon 1, que l'on note B .

Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{\varphi(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$. D'après la question précédente, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq p$ (et donc $\varphi(n) \neq \varphi(p)$), $\|h_n - h_p\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 2\sqrt{\pi} = \sqrt{2}$.

La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne vérifie donc pas la définition d'une suite de CAUCHY (pour $\varepsilon = 1$ par exemple). Mais alors, d'après la première question et par contraposition, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

On a ainsi trouvé une suite d'éléments de B dont on ne peut extraire une sous-suite convergente. Ceci montre que B n'est pas compacte.

Exercice 4

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Y_i suit la loi de BERNOULI de paramètre $p = \mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-\theta}$. Donc, $\mathbb{E}(Y_i) = p = e^{-\theta}$ et $\mathbb{V}(Y_i) = p(1-p) = e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})$.

Ensuite, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = e^{-\theta}$. D'autre part, les variables $X_1, \dots, X_n$, sont indépendantes et il en est de même des variables $Y_1, \dots, Y_n$. En particulier, les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont deux à deux indépendantes puis

$$\mathbb{V}(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i) = \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})}{n}.$$

2. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, pour tout réel t ,

$$G_{S_k}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^k e^{\theta(t-1)} = e^{k\theta(t-1)} = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-k\theta} \frac{(k\theta)^i}{i!} t^i.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_k = i) = e^{-k\theta} \frac{(k\theta)^i}{i!}$. Ceci montre que la variable S_k suit la loi de POISSON de paramètre $k\theta$.

(b) Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\varphi_n(j) = \frac{\mathbb{P}(\{X_n = 0\} \cap \{S_n = j\})}{\mathbb{P}(S_n = 0)}.$$

Maintenant, $\{X_n = 0\} \cap \{S_n = j\} = \{X_n = 0\} \cap \{S_{n-1} = j\}$ où cette fois-ci, les événements $\{X_n = 0\}$ et $\{S_{n-1} = j\}$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions. Donc,

$$\begin{aligned} \varphi_n(j) &= \frac{\mathbb{P}(X_n = 0) \times \mathbb{P}(S_{n-1} = j)}{\mathbb{P}(S_n = 0)} = \frac{e^{-\theta} \times e^{-(n-1)\theta} \frac{((n-1)\theta)^j}{j!}}{e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^j}{j!}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j. \end{aligned}$$

3. D'après la formule de transfert, en tenant compte du fait que S_n suit la loi de POISSON de paramètre $n\theta$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi_n(S_n)) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_n(j) \mathbb{P}(S_n = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^j}{j!} = e^{-n\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{((n-1)\theta)^j}{j!} = e^{-n\theta} e^{(n-1)\theta} \\ &= e^{-\theta} = \mathbb{E}(X_n). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi_n(S_n)^2) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_n(j)^2 \mathbb{P}(S_n = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2j} e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-n\theta} \frac{\left(\frac{(n-1)^2}{n} \theta\right)^j}{j!} = e^{-n\theta} e^{\frac{(n-1)^2}{n} \theta} \\ &= e^{(-2 + \frac{1}{n})\theta}. \end{aligned}$$

et donc, d'après la formule de KÖENIG-Huygens,

$$\mathbb{V}(\varphi_n(S_n)) = \mathbb{E}(\varphi_n(S_n)^2) - \mathbb{E}(\varphi_n(S_n))^2 = e^{(-2 + \frac{1}{n})\theta} - e^{-2\theta} = e^{-2\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right).$$

4. Soit $\theta > 0$. $e^\theta - 1 = \int_0^\theta e^t dt$ puis $\int_0^\theta 1 dt \leq e^\theta - 1 = \int_0^\theta e^t dt \leq \int_0^\theta e^\theta dt$ puis $\theta \leq e^\theta - 1 \leq \theta e^\theta$ et finalement $1 \leq \frac{e^\theta - 1}{\theta} \leq e^\theta$. On a montré que

$$\forall \theta > 0, 1 \leq \frac{e^\theta - 1}{\theta} \leq e^\theta.$$

Ensuite, la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $\theta > 0$,

$$h'(\theta) = \frac{\theta e^\theta - (e^\theta - 1)}{\theta^2} = \frac{1}{\theta} \left(e^\theta - \frac{e^\theta - 1}{\theta} \right) \geq 0.$$

La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5. Par croissance de la fonction h sur $]0, +\infty[$, $h\left(\frac{\theta}{n}\right) \leq h(\theta)$ puis

$$\frac{\mathbb{V}(\varphi_n(S_n))}{\mathbb{V}(\overline{Y_n})} = \frac{e^{-2\theta} (e^{\frac{\theta}{n}} - 1)}{\frac{e^{-\theta} (1 - e^{-\theta})}{n}} = \frac{n (e^{\frac{\theta}{n}} - 1)}{e^\theta - 1} = \frac{\frac{e^{\frac{\theta}{n}} - 1}{\frac{\theta}{n}}}{\frac{e^\theta - 1}{\theta}} = \frac{h\left(\frac{\theta}{n}\right)}{h(\theta)} \leq 1.$$

On en déduit que $\mathbb{V}(\varphi_n(S_n)) \leq \mathbb{V}(\overline{Y_n})$.

Ainsi, $\overline{Y_n}$ et $\varphi_n(S_n)$ sont deux fonctions de l'échantillon (pour tout i , $Y_i = \delta_{X_i, 0}$). Ces deux variables ont pour espérance l'espérance commune des X_i , à savoir $e^{-\theta}$ et donc ces deux variables sont des estimateurs sans biais de $e^{-\theta}$. Enfin, la variance de $\varphi_n(S_n)$ est plus petite que la variance de $\overline{Y_n}$ et donc l'estimateur $\varphi_n(S_n)$ est préférable à l'estimateur $\overline{Y_n}$.

Exercice 5

1. On rappelle que si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$. Soit $(k, \ell, m) \in \mathbb{N}^3$. D'après la formule du binôme de NEWTON,

$$(1 + X)^{k+\ell} = \sum_{m=0}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{m} X^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{k+\ell}{m} X^m.$$

Mais d'autre part,

$$(1 + X)^{k+\ell} = (1 + X)^k (1 + X)^\ell = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k}{i} X^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\ell}{j} X^j \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\ell}{m-j} \right) X^m.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que $\binom{k+\ell}{m} = \sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\ell}{m-j}$.

2. L'univers Ω est l'ensemble des tirages simultanés de n allumettes parmi les t allumettes produites. Donc, $\text{card}(\Omega) = \binom{t}{n}$. De plus, ces tirages sont équiprobables.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. L'événement $\{X = k\}$ est réalisé si et seulement si on a tiré k allumettes parmi les d défectueuses et $n - k$ allumettes parmi les $t - d$ non défectueuses. $\{X = k\}$ est donc en bijection avec $\mathcal{P}_k(E_d) \times \mathcal{P}_{n-k}(E_{t-d})$ où $\mathcal{P}_k(E_n)$ désigne l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Par suite, $\text{card}(X = k) = \binom{d}{k} \binom{t-d}{n-k}$. Les différents tirages étant équiprobables, on en déduit que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{card}(X = k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{d}{k} \binom{t-d}{n-k}}{\binom{t}{n}}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k > d$, $k \binom{d}{k} = 0 = d \binom{d-1}{k-1}$. Sinon, $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ puis

$$k \binom{d}{k} = k \frac{d!}{k!(d-k)!} = d \frac{(d-1)!}{(k-1)!((d-1)-(k-1))!} = d \binom{d-1}{k-1}.$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{\binom{t}{n}} \sum_{k=1}^n k \binom{d}{k} \binom{t-d}{n-k} \\
&= \frac{d}{\binom{t}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{d-1}{k-1} \binom{t-d}{n-k} = \frac{d}{\binom{t}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{d-1}{j} \binom{t-d}{n-1-j} \\
&= \frac{d}{\binom{t}{n}} \binom{t-1}{n-1} = d \frac{n!(t-n)!}{t!} \frac{(t-1)!}{(n-1)!(t-n)!} = \frac{nd}{t} \\
&= n \frac{d}{t}.
\end{aligned}$$

5. Pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

6. Soit $(\alpha, \beta) \in]0, 1]^2$. D'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{d}{t}\right| \geq \alpha\right) &= \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq n\alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{(n\alpha)^2} = n \frac{d}{t} \left(1 - \frac{d}{t}\right) \frac{t-n}{t-1} \frac{1}{n^2 \alpha^2} \\
&\leq \frac{1}{4\alpha^2(t-1)} \left(\frac{t}{n} - 1\right) \quad (\text{d'après la question précédente car } p = \frac{d}{t} \in [0, 1])
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{d}{t}\right| \geq \alpha\right) &\leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha^2(t-1)} \left(\frac{t}{n} - 1\right) \leq \beta \Leftrightarrow \frac{t}{n} \leq 1 + 4\alpha^2\beta(t-1) \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{t} \geq \frac{1}{1 + 4\alpha^2\beta(t-1)} \Leftrightarrow n \geq \frac{t}{1 + 4\alpha^2\beta(t-1)} \\
&\Leftrightarrow n \geq \left\lfloor \frac{t}{1 + 4\alpha^2\beta(t-1)} \right\rfloor + 1.
\end{aligned}$$

On pose $n_0 = \left\lfloor \frac{t}{1 + 4\alpha^2\beta(t-1)} \right\rfloor + 1$. Pour $n \geq n_0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{d}{t}\right| \geq \alpha\right) \leq \beta$.

7. Pour $t \geq n$, $\binom{t}{n} = \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!}$ puis, le nombre de facteurs du numérateur étant égal à n et donc étant constant quand t varie,

$$\binom{t}{n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^n}{n!}.$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $t \geq \frac{k}{p}$ de sorte que $pt \geq k$, $\binom{d}{k} = \frac{pt(pt-1)\dots(pt-(k-1))}{k!}$ puis

$$\binom{d}{k} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^k p^k}{k!}$$

De même, pour $t \geq \frac{n-k}{1-p}$ de sorte que $t-d \geq n-k$, $\binom{t-d}{n-k} = \frac{(t-pt)(t-pt-1)\dots(t-pt-(n-k-1))}{(n-k)!}$ puis

$$\binom{t-d}{n-k} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X_t = k) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n! p^k t^k (1-p)^{n-k} t^{n-k}}{t^n k! (n-k)!} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Enfin,

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = \frac{n!}{t(t-1)\dots(t-(n-1))} \times \frac{(t-pt)(t-pt-1)\dots(t-pt-(n-1))}{n!} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(1-p)^n t^n}{t^n} = (1-p)^n.$$

On a montré que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_t = k) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. La loi de X_t tend vers la loi binomiale de paramètres n et p quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 6

1. Soient F un sous-espace de E puis $p = p_F$ la projection orthogonale sur F . Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\langle x, p(y) \rangle = \underbrace{\langle x - p(x), p(y) \rangle}_{\in F^\perp} + \underbrace{\langle p(x), p(y) \rangle}_{\in F} = \langle p(x), p(y) \rangle.$$

Par symétrie des rôles, on a aussi $\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$ et finalement $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$.

On a montré que p est symétrique.

2. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle x, p \circ q \circ p(y) \rangle = \langle p(x), q \circ p(y) \rangle = \langle q \circ p(x), p(y) \rangle = \langle p \circ q \circ p(x), y \rangle$$

et donc $p \circ q \circ p$ est symétrique.

3. Puisque $e_1 = y + z$ avec $y = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \in \text{Vect}(e_1 + e_2)$ et $z = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \in \text{Vect}(e_1 + e_2)^\perp$ (car $\langle e_1 + e_2, e_1 - e_2 \rangle = \|e_1\|^2 - \|e_2\|^2 = 0$), on a $q(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ puis

$$p \circ q(e_1) = \frac{1}{2}(p(e_1) + p(e_2)) = \frac{1}{2}e_1.$$

Mais alors, $(p \circ q)^2(e_1) = \frac{1}{2}p \circ q(e_1) = \frac{1}{4}e_1 \neq p \circ q(e_1)$. Ainsi, $p \circ q \neq \text{Id}_E$ et donc $p \circ q$ n'est pas une projection.

4. Puisque p et q sont des projections orthogonales, on sait que $(\text{Im}(p))^\perp = \text{Ker}(p)$ et $(\text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}(q)$. Il s'agit donc de montrer que si $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(q)$, on a $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

$F \subset F + G$ et donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ puis $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

D'autre part, tout élément à la fois dans $F^\perp$ et dans $G^\perp$ est encore orthogonal à toute somme d'un élément de F et d'un élément de G par bilinéarité du produit scalaire et donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$. Finalement, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ ou encore

$$(\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(q).$$

5. $\text{Im}(p \circ q \circ p) = \{p \circ q(p(x)), x \in E\} \subset \{p \circ q(y), y \in E\} = \text{Im}(p \circ q)$.

Inversement, soit $x \in E$. Il existe $(y, z) \in (\text{Im}(p) + \text{Ker}(q)) \times (\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^\perp = (\text{Im}(p) + \text{Ker}(q)) \times \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(q)$ tel que $x = y + z$.

Puisque $z \in \text{Im}(q)$, $q(z) = z$ puis puisque $z \in \text{Ker}(p)$, $p(q(z)) = p(z) = 0$. Il reste $p \circ q(x) = p \circ q(y) + p \circ q(z) = p(q(y))$. En posant $y = p(x_1) + y_2$ avec $x_1 \in E$ et $y_2 \in \text{Ker}(q)$, on obtient $p(q(y)) = p(q(p(x_1))) + p(q(y_2)) = p \circ q \circ p(x_1)$ et donc $p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x_1)$. Ceci montre que $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im}(p \circ q \circ p)$ et finalement que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p \circ q \circ p)$.

6. $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique et donc $p \circ q \circ p$ est diagonalisable d'après le théorème spectral.

Soit λ une valeur propre de $p \circ q \circ p$ et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Donc, $p \circ q \circ p(x) = \lambda x$ puis $\lambda \langle x, x \rangle = \langle p \circ q \circ p(x), x \rangle$ puis (en tenant compte de $\|x\|^2 > 0$),

$$\lambda = \frac{\langle p \circ q \circ p(x), x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle q(p(x)), p(x) \rangle}{\|x\|^2}.$$

Pour tout $y \in E$, $\langle q(y), y \rangle = \langle q(y), q(y) \rangle + \langle q(y), y - q(y) \rangle = \|q(y)\|^2$ (car $q(y)$ est dans $\text{Im}(q)$ et $y - q(y)$ est dans $\text{Ker}(q) = (\text{Im}(q))^\perp$). Donc,

$$\lambda = \frac{\|q(p(x))\|^2}{\|x\|^2}$$

ce qui montre déjà que $\lambda \geq 0$. D'autre part, on sait que pour tout y de E , $\|p(y)\| \leq \|y\|$ (car d'après le théorème de PYTHAGORE, pour tout $y \in E$, $\|y\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|y - p(y)\|^2 \geq \|p(y)\|^2$) et de même, pour tout $y \in E$, $\|q(y)\| \leq \|y\|$. Donc,

$$\lambda = \frac{\|q(p(x))\|^2}{\|x\|^2} \leq \frac{\|p(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = 1.$$

On a montré que les valeurs propres de $p \circ q \circ p$ sont dans $[0, 1]$.

7. Soit $x \in \text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p \circ q \circ p)$. Il existe $x_1 \in E$ tel que $x = p \circ q \circ p(x_1)$. On en déduit que

$$p \circ q \circ p(x) = p \circ q \circ p \circ p \circ q \circ p(x_1) = p \circ q \circ p \circ q \circ p(x_1) = p \circ q(x).$$

Soient λ une (éventuelle) valeur propre non nulle de $p \circ q \circ p$ et x un vecteur propre associé. Alors, $p \circ q \circ p(x) = \lambda x$ puis $x = p \circ q \circ p\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \text{Im}(p \circ q \circ p)$. On en déduit que $p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x) = \lambda x$. Donc, λ est valeur propre de $p \circ q$ et x est un vecteur propre associé.

Soit λ une (éventuelle) valeur propre non nulle de $p \circ q$ et x un vecteur propre associé. Donc, $p \circ q(x) = \lambda x$ puis $x = p \circ q\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \text{Im}(p \circ q)$. Mais alors $p \circ q \circ p(x) = p \circ q(p(x)) = \lambda x$.

λ est donc une valeur propre de $p \circ q \circ p$ (et en particulier $\lambda \in]0, 1]$) et x est un vecteur propre associé.

On a montré que pour tout $\lambda \in]0, 1]$, $E_\lambda(p \circ q) = E_\lambda(p \circ q \circ p)$ (y compris si λ n'est pas valeur propre de $p \circ q$). En particulier, $p \circ q$ et $p \circ q \circ p$ ont les mêmes valeurs propres réelles non nulles.

8. Puisque $p \circ q \circ p$ est diagonalisable, $\dim(E) = \dim(E_0(p \circ q \circ p)) + \sum_{\lambda \in \text{Sp}(p \circ q \circ p) \setminus \{0\}} \dim(E_\lambda(p \circ q \circ p))$.

D'après la question précédente, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(p \circ q \circ p) \setminus \{0\}$, $E_\lambda(p \circ q) = E_\lambda(p \circ q \circ p)$. D'autre part, puisque $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p \circ q \circ p)$, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(p \circ q)) = \dim(E) - \text{rg}(p \circ q) = \dim(E) - \text{rg}(p \circ q \circ p) = \dim(\text{Ker}(p \circ q \circ p)).$$

Ainsi, $\dim(E) = \dim(E_0(p \circ q)) + \sum_{\lambda \in \text{Sp}(p \circ q) \setminus \{0\}} \dim(E_\lambda(p \circ q))$. Mais alors, $p \circ q$ est diagonalisable. De plus, les valeurs propres de $p \circ q$ et $p \circ q \circ p$ sont les mêmes et donc les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans $[0, 1]$.