

PREMIERE COMPOSITION

Exercice 1

1. $\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = [\ln(1+x^2)]_2^3 = \ln(10) - \ln(5) = \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \ln(2).$

2. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note (E_m) l'équation proposée. Si $m = 1$, (E_m) est une équation du premier degré et en particulier, (E_m) n'admet pas deux solutions distinctes. Soit $m \neq 1$. Le discriminant de (E_m) est

$$\Delta_m = 4(m-2)^2 - 4(m-1)(m+1) = 4(m^2 - 4m + 4 - m^2 + 1) = 4(-4m + 5).$$

(E_m) admet deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta_m > 0$ (et $m \neq 1$) ce qui équivaut à $m < \frac{5}{4}$ (et $m \neq 1$).

En résumé, l'équation (E_m) admet deux solutions distinctes si et seulement si $m \in]-\infty, 1[\cup]1, \frac{5}{4}[$.

3. Pour tout réel x ,

$$\frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3} = \frac{3x^3 + 9x + 2x^2 + 6 - 2x - 7}{x^2 + 3} = 3x + 2 - \frac{2x + 7}{x^2 + 3}.$$

Ensuite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3} - (3x + 2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x + 7}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x} \frac{1 + \frac{7}{2x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 0.$

On en déduit que la droite d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3}$ en $+\infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^4 = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^4 - 1 = -1 < 0$. D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))^2 - 4x^3 = +\infty. \text{ Finalement, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(x))^2 - 4x^3}{x(\ln(x))^4 - 1} = -\infty.$$

5. Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{(2u_n + 3) - (u_n + 4)}{(2u_n + 3) + 3(u_n + 4)} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\ &= \frac{1}{5} v_n. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

7. (a) Le mot AFRIQUE est composé de sept lettres deux à deux distinctes. Il y a autant d'anagrammes du mot AFRIQUE que de permutations d'un ensemble à 7 éléments à savoir $7! = 5040$.

(b) Le nombre d'anagrammes du mot CA_1PESA_2 est $6! = 720$. Ces 720 anagrammes peuvent être regroupés deux par deux de sorte que, en effaçant les indices 1 et 2, on obtient le même mot. Il y a donc $\frac{720}{2} = 360$ anagrammes (deux à deux distincts) du mot CAPESA.

8. (a) $1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et
 $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

(b) Par suite,

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$3f' + 2f = 0 \Leftrightarrow f' + \frac{2}{3}f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{2x}{3}}f'(x) + \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \left(e^{\frac{2x}{3}}f\right)'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{2x}{3}}f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-\frac{2x}{3}}.$$

De plus, $f(1) = 3 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{2}{3}} = 3 \Leftrightarrow C = 3e^{\frac{2}{3}}$. L'unique fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $3f'(x) + 2f(x) = 0$ et $f(1) = 3$ est la fonction $f : x \mapsto 3e^{-\frac{2}{3}(x-1)}$.

10. Soit $z \in \mathbb{C}$. $z^5 - z^2 = z^2(z^3 - 1) = z^2(z - 1)(z^2 + z + 1)$ puis $z^5 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$ ou $z^2 + z + 1 = 0$.

Le discriminant du trinôme $z^2 + z + 1$ est $\Delta = -3$ ou encore $\Delta = (i\sqrt{3})^2$. L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathcal{S} = \left\{ 0, 1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Exercice 2

1. (a) Puisque $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. D'autre part, si on suppose $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ puis $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$. Cette dernière égalité est encore valable conventionnellement quand $\mathbb{P}(A) = 0$ et finalement

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(b) $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ et de plus, $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$. Donc,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}(B|\bar{A}).$$

2. L'énoncé fournit $\mathbb{P}(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A|T) = \frac{1}{2}$. L'énoncé fournit aussi $\mathbb{P}(A|\bar{T}) = \frac{1}{6}$. La probabilité demandée est $\mathbb{P}(T|A)$. D'après la formule de BAYES,

$$\mathbb{P}(T|A) = \frac{\mathbb{P}(A|T) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|T) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A|T) \times \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A|\bar{T}) \times \mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}.$$

Si on obtient un 6 en lançant une fois le dé, il y a une chance sur 2 que le dé soit truqué.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « on obtient n fois le 6 ». Comme dans la question précédente,

$$\mathbb{P}(T|A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_n|T) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A_n|T) \times \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A_n|\bar{T}) \times \mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6^n} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{3^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

Si on obtient n fois un 6 en lançant n fois le dé, la probabilité que le dé soit truqué est $\frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$.

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ ou encore si en lançant un grand nombre de fois le dé, on obtient à chaque fois un 6, il est presque certain que le dé est truqué.

Exercice 3

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Donc, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles. Par suite, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes (et en particulier coplanaires) ou non coplanaires.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. $M \in \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$. Les points de $\mathcal{D}_1$ sont donc les points de la forme $(\lambda, -1 + \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, les points de $\mathcal{D}_2$ sont les points de la forme $(\mu, 1, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Soient $M(\lambda, -1 + \lambda, \lambda) \in \mathcal{D}_1$ et $N(\mu, 1, \mu) \in \mathcal{D}_2$ où λ et μ sont deux réels.

$$M = N \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda - 1 = 1 \\ \lambda = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2 = \mu.$$

Donc, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en le point $C(2, 1, 2)$. En particulier, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires. Par suite, il existe un plan $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}$. On note que le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1, 0, -1)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et donc que le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Par suite, le plan $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $x - z + a = 0$. De plus, $A \in \mathcal{P}$ et donc $a = 0$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $x - z = 0$.

2. (a) Puisque $p_1(M) \in \mathcal{D}_1$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p_1(M)$ ait pour coordonnées $(\lambda, \lambda - 1, \lambda)$. Ensuite,

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{Mp_1(M)} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - x) + (\lambda - 1 - y) + (\lambda - z) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x + y + z + 1}{3}.$$

Les coordonnées de $p_1(M)$ sont $(\lambda, \lambda - 1, \lambda)$ où $\lambda = \frac{x + y + z + 1}{3}$.

(b) Puisque $p_2(M) \in \mathcal{D}_2$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p_2(M)$ ait pour coordonnées $(\mu, 1, \mu)$. Ensuite,

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{Mp_2(M)} = 0 \Leftrightarrow (\mu - x) + (\mu - z) = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{x + z}{2}.$$

Les coordonnées de $p_2(M)$ sont $(\mu, 1, \mu)$ où $\mu = \frac{x + z}{2}$.

3. $p_1(M) = p_1(H) \Leftrightarrow \frac{x + y + z + 1}{3} = \frac{a + b + c + 1}{3} \Leftrightarrow x + y + z = a + b + c$. De même, $p_2(M) = p_2(H) \Leftrightarrow x + z = a + c$. Donc,

$$\begin{cases} p_1(M) = p_1(H) \\ p_2(M) = p_2(H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ x + z = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = b \\ x + z = a + c \end{cases}$$

L'ensemble cherché est l'ensemble des points de la forme $(x, b, a + c - x)$, $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite passant par $H(a, b, c)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1, 0, -1)$.

L'ensemble cherché est la perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ passant par H .

4. (a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Soient $\lambda = \frac{x + y + z + 1}{3}$ et $\mu = \frac{x + z}{2}$. Les coordonnées de I sont $\left(\frac{\lambda + \mu}{2}, \frac{\lambda - 1 + 1}{2}, \frac{\lambda + \mu}{2}\right)$ ou encore $\left(\frac{1}{2} \left(\frac{x + y + z + 1}{3} + \frac{x + z}{2}\right), \frac{x + y + z + 1}{6}, \frac{1}{2} \left(\frac{x + y + z + 1}{3} + \frac{x + z}{2}\right)\right)$ ou enfin $\left(\frac{5x + 2y + 5z + 2}{12}, \frac{x + y + z + 1}{6}, \frac{5x + 2y + 5z + 2}{12}\right)$.

(b) Pour tout point M de l'espace, $p_1(M)$ et $p_2(M)$ sont deux points du plan $\mathcal{P}$ puis I est un point de $\mathcal{P}$. Donc, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \left\{ \left(\frac{5x + 2y + 5z + 2}{12}, \frac{x + y + z + 1}{6}, \frac{5x + 2y + 5z + 2}{12} \right), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) + \frac{x + z}{12}(5, 2, 5) + \frac{y}{6}(1, 1, 1), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) + \lambda(5, 2, 5) + \mu(1, 1, 1), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{I}$ est donc un plan contenu dans $\mathcal{P}$ et finalement $\mathcal{I} = \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $x - z = 0$.

Exercice 4

1. (a) $(1 - 3i\sqrt{3})^2 = 1 - 6i\sqrt{3} - 27 = -26 - 6i\sqrt{3}.$

(b) Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (9 + i\sqrt{3})^2 - 4(26 + 6i\sqrt{3}) = 81 + 18i\sqrt{3} - 3 - 104 - 24i\sqrt{3} = -26 - 6i\sqrt{3} = (1 - 3i\sqrt{3})^2.$$

L'équation proposée admet deux solutions distinctes à savoir $z_1 = \frac{9 + i\sqrt{3} + 1 - 3i\sqrt{3}}{2} = 5 - i\sqrt{3}$ et

$$z_2 = \frac{9 + i\sqrt{3} - 1 + 3i\sqrt{3}}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}.$$

2. $b = e^{\frac{i\pi}{3}} a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(5 - i\sqrt{3}) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + i\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 2i\sqrt{3}.$

3. $q = \frac{b}{2} = 2 + i\sqrt{3}.$

4.

$$\begin{aligned} \text{ABQK est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow k = q + a - b \\ &\Leftrightarrow k = 2 + i\sqrt{3} + 5 - i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3} \Leftrightarrow k = 3 - 2i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc, le point K a pour coordonnées $(3, -2\sqrt{3})$.

5. (a) $\frac{k-a}{k} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3}i(-2 - i\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}i} = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$ Donc, $\frac{k-a}{k}$ est un imaginaire pur.

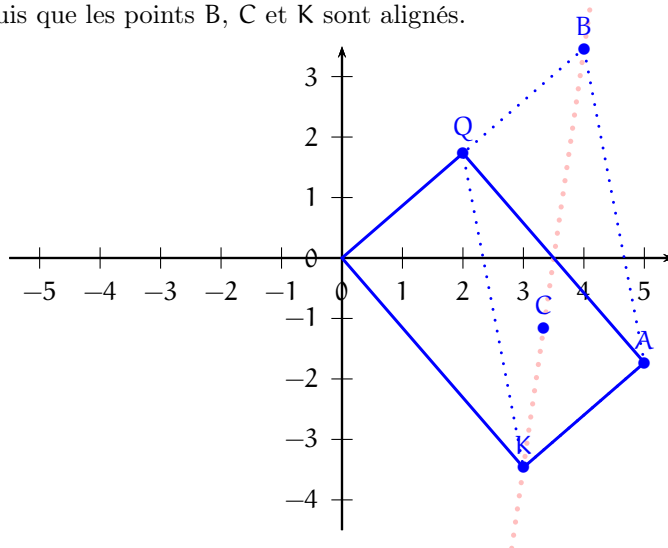
(b) $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{AK}) = \arg\left(\frac{k-a}{k-0}\right) = \arg\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi].$ Les droites (OK) et (AK) sont perpendiculaires.

(c) Puisque Q est le milieu du segment [OB], $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{KA}.$ Donc le quadrilatère OQAK est également un parallélogramme. De plus, les droites (OK) et (AK) sont perpendiculaires et donc le quadrilatère OQAK est un rectangle.

6. $c = \frac{2a}{3} = \frac{2(5 - i\sqrt{3})}{3}$ puis

$$\frac{k-b}{k-c} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{2(5 - i\sqrt{3})}{3}} = \frac{3(-1 - 4i\sqrt{3})}{-1 - 4i\sqrt{3}} = 3.$$

On en déduit que $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{CK}$ puis que les points B, C et K sont alignés.



Exercice 5

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et ne s'annulant pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc, la fonction f est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. (a) Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

(b) La fonction f' est strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors, $-x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puis, en posant $s = -t$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\cos(t)} dt = \int_0^x \frac{1}{\cos(-s)} \times -ds = - \int_0^x \frac{1}{\cos(s)} ds = -f(x).$$

La fonction f est impaire.

4. (a) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $g(t) = \frac{\pi}{2} - t - \cos(t)$. La fonction g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g'(t) = -1 + \sin(t)$. La fonction g' est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc la fonction g est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par suite, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - t - \cos(t) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0,$$

et donc, $\cos(t) \leq \frac{\pi}{2} - t$.

(b) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout réel t de $[0, x]$, $0 < \cos(t) \leq \frac{\pi}{2} - t$ puis $\frac{1}{\cos(t)} \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t}$. Par croissance de l'intégration (en tenant compte de $x > 0$),

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)} dt \geq \int_0^x \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t} dt = \left[-\ln\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right]_0^x = -\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Puisque $-\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

5. La fonction f étant impaire, on a aussi $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$. Ensuite, la fonction f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (car dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ d'après la question 1.) et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ d'après la question 2.(b). La fonction f réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

6. (a) $f(0) = 0$ et donc $g(0) = 0$.

(b) Pour tout réel y , $f(g(y)) = y$. En admettant que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g'(y)f'(g(y)) = 1$ ou encore $\frac{g'(y)}{\cos(g(y))} = 1$ et donc $g'(y) = \cos(g(y))$.

(c) En redérivant, on obtient pour tout réel y , $g''(y) = -g'(y)\sin(g(y)) = -\cos(g(y))\sin(g(y)) = -\frac{1}{2}\sin(2g(y))$ et donc $2g''(y) + \sin(2g(y)) = 0$.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_-$ et pour tout réel x négatif ou nul, $f'_n(x) = \frac{e^x}{n} - 1$. Ensuite, pour tout $x < 0$, $e^x < 1$ puis $\frac{e^x}{n} < \frac{1}{n} \leq 1$ et donc $f'_n(x) = \frac{e^x}{n} - 1 < 0$. La fonction f'_n est strictement négative sur $] -\infty, 0[$ et donc la fonction f_n est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction f_n est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède au plus une solution dans $] -\infty, 0]$. Ensuite, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(-1) = \frac{1}{en} > 0$. Puisque la fonction f_n est continue sur $[-1, 0]$, la fonction f_n s'annule au moins une fois dans $[-1, 0]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Finalement, la fonction f_n s'annule exactement une fois et une seule dans $] -\infty, 0]$ et de plus, la solution de l'équation $f_n(x) = 0$ est dans $[-1, 0]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_{n+1} , $\frac{e^{u_{n+1}}}{n+1} = u_{n+1} + 1$ puis

$$f_n(u_{n+1}) = \frac{e^{u_{n+1}}}{n} - \frac{e^{u_{n+1}}}{n+1} = \frac{e^{u_{n+1}}}{n(n+1)} > 0 = f_n(u_n).$$

Ainsi, u_n et u_{n+1} sont deux réels de l'intervalle de $[-1, 0]$ tels que $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. Par stricte décroissance de la fonction f_n sur $[-1, 0]$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} < u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par -1 . Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel ℓ . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}e^{u_n} - u_n - 1 = 0$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0 \times e^\ell - \ell - 1 = 0$ puis $\ell = -1$.

On a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n(u_n + 1) = e^{u_n}$ et donc $n(u_n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = n^2 \left(u_n + 1 - \frac{e^{-1}}{n} \right) = n \left(n(u_n + 1) - \frac{1}{e} \right) = n \left(e^{u_n} - \frac{1}{e} \right) = \frac{n}{e} (e^{u_{n+1}} - 1)$

(b) On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x}{x} = 1$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n(u_n + 1)}{e} \times \frac{e^{u_{n+1}} - 1}{u_{n+1} + 1}$. Ensuite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_{n+1}} - 1}{u_{n+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(u_n + 1)}{e} = \frac{1}{e} \times e^{-1} = \frac{1}{e^2}$. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{e^2}$.

Exercice 7

1. Pour tous réels x et y ,

$$f(x, y) = 2e^{-x} + 2x^2 + x^2 - 2xy + y^2 = h(x) + (x - y)^2 \geq h(x).$$

2. (a) La fonction $g : x \mapsto e^{-x} - 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction g réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. En particulier, la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore l'équation $e^{-x} - 2x = 0$ admet une solution et une seule.

(b) Par définition de α , $e^{-\alpha} = 2\alpha$ et donc $h(\alpha) = 2e^{-\alpha} + 2\alpha^2 = 4\alpha + 2\alpha^2$.

(c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $h'(x) = -2e^{-x} + 4x = -2(e^{-x} - 2x) = -2g(x)$. La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si $x > \alpha$, $g(x) < g(\alpha) = 0$ puis $h'(x) > 0$ et si $x < \alpha$, $g(x) > g(\alpha) = 0$ puis $h'(x) < 0$. La fonction h est donc strictement décroissante sur $] -\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

3. Par suite, la fonction h admet un minimum en α . Mais alors, pour tous réels x et y ,

$$f(x, y) = h(x) + (x - y)^2 \geq h(x) \geq h(\alpha) = f(\alpha, \alpha).$$

La fonction f admet donc un minimum en (α, α) et ce minimum est égal à $h(\alpha)$ c'est-à-dire à $4\alpha + 2\alpha^2$.