

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS

ISE Cycle long / AS

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est constituée de six exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque.
Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x),$$

tandis que $f(0) = 0$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations complet de la dérivée f' sur $]0 ; +\infty[$.
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la portion du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
5. Démontrer que le maximum de f , atteint en un réel α positif, est égal à $\alpha^2 + \alpha$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \frac{1}{2}]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

1. a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $[0 ; \frac{1}{2}]$,

$$g(x) = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}.$$

- b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, dt$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos(\theta)}$.

Exercice 3

Une personne, fumeuse, effrayée par des statistiques alarmantes sur les risques de cancer, consulte des études parues sur la capacité d'un fumeur à cesser définitivement la cigarette. Pour n entier naturel non nul, on note F_n l'événement : « la personne fume le $n^{\text{ème}}$ jour » et p_n la probabilité de F_n . On a, en particulier, $p_1 = 1$. On estime que :

- Si la personne a fumé le $n^{\text{ème}}$ jour, alors la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,9.
- Si la personne n'a pas fumé le $n^{\text{ème}}$ jour, alors la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,3.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , pour tout n entier naturel non nul.
2. En étudiant la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = p_n - \frac{7}{16}$, montrer que la suite (p_n) ne tend pas vers 0.

Exercice 4

Dans un élevage de grande ampleur, 5 % des animaux contractent une maladie. Un échantillon de n animaux ($n \geq 20$) pris au hasard est assimilé à un tirage avec remise et est soumis à un test de dépistage. Pour cela, on prélève le sang de chacun des n animaux de l'échantillon. Ensuite on analyse les prélèvements sanguins selon deux méthodes possibles :

Méthode 1 : On effectue une analyse individuelle des n prélèvements de l'échantillon, ce qui représente n analyses.

Méthode 2 : On analyse le mélange des n prélèvements de l'échantillon : si le test est négatif à cette maladie, on en déduit que tous les prélèvements sont négatifs ; si le test est positif à cette maladie, on effectue alors une analyse sanguine individuelle des n animaux de l'échantillon pour déterminer précisément lesquels sont positifs à la maladie.

On voudrait connaître, en fonction de la taille n de l'échantillon, la méthode la plus économique, c'est-à-dire, celle qui, en moyenne, nécessite le moins d'analyses.

1. On note X_n la variable aléatoire qui donne, pour un échantillon de taille n , le nombre d'analyses effectuées avec la Méthode 2.
 - a) Préciser les valeurs prises par X_n . Justifier brièvement.
 - b) Exprimer, en fonction de n , le nombre moyen d'analyses effectuées pour un échantillon de n animaux avec cette deuxième méthode.
2. Montrer que la Méthode 2 est la plus économique pour les valeurs de n solutions de l'inéquation $n \ln(0,95) + \ln(n) > 0$.
3. On considère la fonction f définie sur $[20 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(0,95) + \ln(x)$. On admet que cette fonction est continue et strictement décroissante sur $[20 ; +\infty[$ et qu'elle s'annule en un réel compris entre les entiers 87 et 88. En déduire quelle sera la méthode la plus économique selon toutes les valeurs $n \geq 20$ possibles de tailles d'échantillon.

Exercice 5

On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $e^z = z_0$.
2. Déterminer tous les entiers naturels n tels que z_0^n soit un réel positif.

Exercice 6

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. En déduire le comportement de la suite (V_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.