

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS

ISE Cycle long / AS

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Avertissement !

- Le sujet comporte sept exercices et cinq pages numérotées de 1 à 5.
- L'exercice 1 est composé de 10 questions indépendantes entre elles, toutes notées sur 1 point. Une note strictement inférieure à 6 est éliminatoire. Toutefois, cet exercice ne comptera que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve.

Notations

- On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*, et on pose : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des *nombres réels*, par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des *nombres réels positifs ou nuls*, par $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des *nombres réels négatifs ou nuls*, et on pose : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes*.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2} dx$, en simplifiant le résultat le plus possible.
2. Déterminer tous les nombres $m \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'équation $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m+1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède exactement deux solutions distinctes.
3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.
4. Étudier la limite de $\frac{\ln(x)^2 - 4x^3}{x \ln(x)^4 - 1}$ lorsque x tend vers 0^+ .

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.
6. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison. On admettra que les suites sont bien définies.
7. On appelle *anagramme* d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres, mais dans un ordre quelconque. Par exemple, le mot « NUCOROCS » est un anagramme du mot « CONCOURS ».
 (a) Combien le mot « AFRIQUE » a-t-il d'anagrammes ?
 (b) Combien le mot « CAPESA » a-t-il d'anagrammes ?
8. (a) Déterminer une forme exponentielle de $1 + i\sqrt{3}$ et de $1 - i$.
 (b) En déduire une forme exponentielle de $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.
9. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, 3f'(x) + 2f(x) = 0$ et $f(1) = 3$.
10. Résoudre l'équation $z^5 - z^2 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

On rappelle que pour deux événements A et B , si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on appelle *probabilité de A sachant B* , et on note $\mathbb{P}(A|B)$, le nombre : $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

1. *Formules de Bayes*. Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

- (a) Montrer que : $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
- (b) Montrer que : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) \times \mathbb{P}(\bar{A})$.

On dispose de 100 dés cubiques, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Parmi ces 100 dés, 25 sont truqués : la probabilité d'obtenir un 6 pour ceux-ci vaut $\frac{1}{2}$.

2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé une fois et on obtient le nombre 6. En utilisant la question 1., calculer la probabilité que ce dé soit truqué. On pourra noter T l'événement : « le dé choisi est truqué », et A l'événement : « on obtient un 6 lors du lancer ».
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois un 6. On note p_n la probabilité que ce dé soit truqué.
 (a) Expliciter p_n en fonction de n .
 (b) Déterminer la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Interpréter le résultat.

Exercice 3

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on appelle $\mathcal{D}_1$ la droite passant par le point $A(0, -1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$, et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par le point $B(0, 1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(1, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe un plan $\mathcal{P}$ pour lequel $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}$.

Pour tout point M de l'espace $\mathbb{R}^3$, on note $p_1(M)$ (resp. $p_2(M)$) la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$). On rappelle que $p_1(M)$ (resp. $p_2(M)$) est par définition l'unique point de $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) pour lequel :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{Mp_1(M)} = 0 \quad (\text{resp.} \quad \vec{v} \cdot \overrightarrow{Mp_2(M)} = 0).$$

2. Dans cette question, on fixe un point $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et on pose : $\lambda = \frac{x + y + z + 1}{3}$.
 - (a) Vérifier que $p_1(M)$ a pour coordonnées $(\lambda, \lambda - 1, \lambda)$.
 - (b) Déterminer de même les coordonnées de $p_2(M)$. *Indication : vous pourrez remarquer que tout point de $\mathcal{D}_2$ est de la forme $(\mu, 1, \mu)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$.*
3. Soit $H(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ayant les mêmes projections orthogonales sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ que H , c'est-à-dire :

$$\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \quad p_1(M) = p_1(H) \quad \text{et} \quad p_2(M) = p_2(H)\}.$$

4.
 - (a) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[p_1(M)p_2(M)]$ pour tout $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 - (b) Décrire l'ensemble $\mathcal{I}$ des points I lorsque M parcourt $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On rappelle que :

- pour deux points A et B d'affixes respectifs a et b , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$;
- l'angle entre deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2 , tous deux supposés non nuls, correspond à l'argument du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$.

1.
 - (a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(1 - i3\sqrt{3})^2$.
 - (b) Résoudre l'équation : $z^2 - (9 + i\sqrt{3})z + 26 + 6i\sqrt{3} = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On pose $a = 5 - i\sqrt{3}$ et on note A l'image de a . On considère de plus le point B d'affixe $b = a e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe b .
3. Déterminer l'affixe q du point Q milieu de $[OB]$.
4. Déterminer l'affixe k du point K tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.
5.
 - (a) Vérifier que $\frac{k - a}{k}$ est imaginaire pur.
 - (b) En déduire l'angle entre (OK) et (AK) .
 - (c) Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$.

On pose $c = \frac{2a}{3}$ et on note C l'image de c .

6. Ecrire $\frac{k-b}{k-c}$ sous forme algébrique. Que peut-on en déduire pour les points B , C et K ?

Exercice 5

Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on pose : $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
2. (a) Calculer la dérivée de f .
(b) En déduire le sens de variation de f .
3. En effectuant le changement de variable $s = -t$ dans l'intégrale définissant $f(x)$, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, déterminer la parité de f .
4. (a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[: \cos(t) \leq \frac{\pi}{2} - t$.
(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbb{R}$.

On appelle $g: \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ la réciproque de f . On rappelle que : $\forall y \in \mathbb{R}, f(g(y)) = y$.

6. (a) Calculer $g(0)$.
(b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R} : g'(y) = \cos(g(y))$.
(c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R} : 2g''(y) + \sin(2g(y)) = 0$.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{n} - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}_-$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement décroissante sur son ensemble de définition.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [-1, 0]$, possède une unique solution pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la solution de l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [-1, 0]$.

3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. *Indication : vous pourrez comparer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
5. Montrer que la suite $(n(u_n + 1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = n^2 \left(u_n + 1 - \frac{e^{-1}}{n} \right)$.

6. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : v_n = \frac{n}{e}(e^{u_n+1} - 1)$.
(b) Rappeler la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
(c) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer la limite.

Exercice 7

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x, y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad h(x) = 2e^{-x} + 2x^2.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x, y) \geq h(x)$.
2. (a) Montrer que l'équation $e^{-x} - 2x = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution. On la note α dans la suite de l'exercice.
(b) Exprimer $h(\alpha)$ sous la forme d'un polynôme en α .
(c) Étudier les variations de h .
3. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$. Vous exprimerez ce minimum en fonction de α .