

PREMIERE COMPOSITION

1 - Problème d'analyse

Partie A - Convergence et premières propriétés de g

A.1. Soit $x > -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+x > 0$ puis $(n+x)^2 \neq 0$ et donc $\frac{1}{(n+x)^2}$ existe dans $\mathbb{R}$. De plus, $\frac{1}{(n+x)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha = 2 > 1$) et donc la série de terme général $\frac{1}{(n+x)^2}$, $n \geq 1$, converge puis $g(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

On a montré que la fonction g est bien définie sur $] -1, +\infty[$.

A.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$, posons $g_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$ de sorte que pour tout $x > -1$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$. Soit $a > -1$.

- La série de fonctions de terme général g_n , $n \geq 1$, converge simplement vers la fonction g sur $[a, +\infty[$.
- Soit $n \geq 1$. La fonction g_n est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$g_n^{(k)}(x) = \frac{(-2)(-3)\dots(-(k+1))}{(n+x)^{k+2}} = \frac{(-1)^k(k+1)!}{(n+x)^{k+2}}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \geq a$, $|g_n^{(k)}(x)| = \frac{(k+1)!}{(n+a)^{k+2}}$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n^{(k)}\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{(k+1)!}{(n+a)^{k+1}}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $k+2 > 1$, la série de terme général $\frac{(k+1)!}{(n+a)^{k+2}}$, $n \geq 1$, converge et il en est de même de la série de terme général $\|g_n^{(k)}\|_{\infty, [a, +\infty[}$, $n \geq 1$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions de terme général $g_n^{(k)}$, $n \geq 1$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme généralisé, la fonction g est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $a > -1$, on a montré que la fonction est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ et de plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, g^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(k+1)!}{(x+n)^{k+2}}.$$

A.3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction g est m fois dérivable en 0 et admet donc un développement limité à l'ordre m en 0, son développement de TAYLOR-YOUNG. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_n^{(k)}(0) = (-1)^k(k+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}} = (-1)^k(k+1)!\zeta(k+2)$ puis

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sum_{k=0}^m \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^m) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sum_{k=0}^m (-1)^k(k+1)\zeta(k+2)x^k + o(x^m).$$

Partie B - Convergence et premières propriétés de g

B.1. a) Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, $0 < k+x \leq t+x \leq k+1+x$ puis $\frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \frac{1}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{(k+x)^2}$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que

$$\frac{1}{(k+1+x)^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1+x)^2} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(t+x)^2} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+x)^2} dt = \frac{1}{(k+x)^2}.$$

b) Soit $x > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(t+x)^2} dt \leq \frac{1}{(k+x)^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{(t+x)^2} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+x)^2}$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+x)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{(x+t)^2} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+x)^2}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $g(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2} dt \leq g(x)$ avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2} dt = \left[-\frac{1}{t+x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1+x}.$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} \leq g(x) \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}.$$

c) Pour tout $x > 0$, $1 \leq (x+1)g(x) \leq 1 + \frac{1}{x+1}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = 1$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)g(x) = 1$ ou encore

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

B.2. On reprend les notations de la question **A.2**. Soit $n \geq 2$. Pour tout $x > -1$, $|g_n(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$ puis $\|g_n\|_{\infty,]-1, +\infty[} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général g_n , $n \geq 2$, converge normalement et en particulier uniformément sur $] -1, +\infty[$. Puisque chaque fonction g_n , $n \geq 2$, a une limite réelle ℓ_n en -1 à droite, à savoir $\ell_n = \frac{1}{(n-1)^2}$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)$ a une limite réelle ℓ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Par suite,

$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x) \underset{x \rightarrow -1, x > -1}{=} \frac{1}{(x+1)^2} + \ell + o(1) \underset{x \rightarrow -1, x > -1}{=} \frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right).$$

Ceci montre que

$$g(x) \underset{x \rightarrow -1, x > -1}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Partie C - Une représentation intégrale de g

C.1. Soit $\alpha > 0$. La fonction $h_\alpha : t \mapsto t^{\alpha-1}(-\ln(t))$ est continue et positive sur $]0, 1]$. De plus, $t^{-\frac{\alpha}{2}+1}h_\alpha(t) = t^{\frac{\alpha}{2}}(-\ln(t)) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(1)$ car $\frac{\alpha}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Mais alors, $h_\alpha(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^{-1+\frac{\alpha}{2}})$ avec $-1 + \frac{\alpha}{2} > -1$. On en déduit que la fonction h_α est intégrable sur un voisinage de 0 à droite puis que $\int_0^1 h_\alpha(t) dt$ est une intégrale convergente.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \frac{t^\alpha}{\alpha}$ et $t \mapsto -\ln(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 t^{\alpha-1} (-\ln(t)) \, dt &= \left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha} (-\ln(t)) \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \times \frac{1}{t} \, dt = \frac{\varepsilon^{\alpha} \ln(\varepsilon)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_{\varepsilon}^1 t^{\alpha-1} \, dt \\ &= \frac{\varepsilon^{\alpha} \ln(\varepsilon)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (1 - \varepsilon^{\alpha}).\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, on obtient (grâce à un théorème de croissances comparées), $\int_0^1 t^{\alpha-1} (-\ln(t)) \, dt = \frac{1}{\alpha^2}$.

C.2.. Soit $x > -1$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^{n+x-1} (-\ln(t)) \, dt = \frac{1}{(n+x)^2}$ (car $n+x > 0$) puis

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{n+x-1} (-\ln(t)) \, dt.$$

C.3.. Soit $x > -1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1]$, posons $h_n(t) = t^{n+x-1} (-\ln(t))$.

• Chaque fonction h_n est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n(1) = 0$. La série de terme général $h_n(1)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(1) = 0$. Soit $t \in [0, 1[$. La série géométrique de terme général $h_n(t) = t^{n+x-1} (-\ln(t))$ converge et de plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t) = \frac{t^x}{1-t} (-\ln(t))$.

Ainsi, la série de fonctions de terme général h_n converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction $t \mapsto \begin{cases} \frac{(-\ln(t))}{1-t} t^x & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$.

De plus, la fonction $t \mapsto \begin{cases} \frac{(-\ln(t))}{1-t} t^x & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

• Enfin, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |h_n(t)| \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 h_n(t) \, dt = g(x) < +\infty$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque,

$$g(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n+x-1} \right) (-\ln(t)) \, dt = \int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{1-t} t^x \, dt.$$

Partie D - Développement asymptotique de g en $+\infty$

D.1. a) $B'_1 = B_0 = 1$ puis il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 = X + a$. Ensuite,

$$\int_0^1 B_1(t) \, dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (t + a) \, dt = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

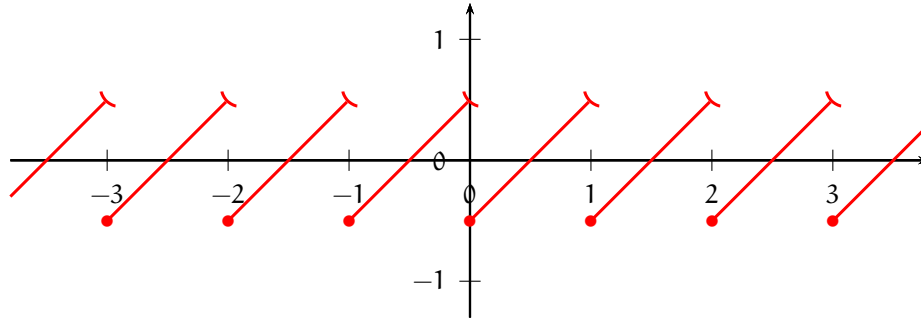
Donc, $B_1 = X - \frac{1}{2}$. Ensuite, $B'_2 = 2B_1 = 2X - 1$ puis il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_2 = X^2 - X + a$. De plus,

$$\int_0^1 B_2(t) \, dt = \int_0^1 (t^2 - t + a) \, dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a = a - \frac{1}{6}$$

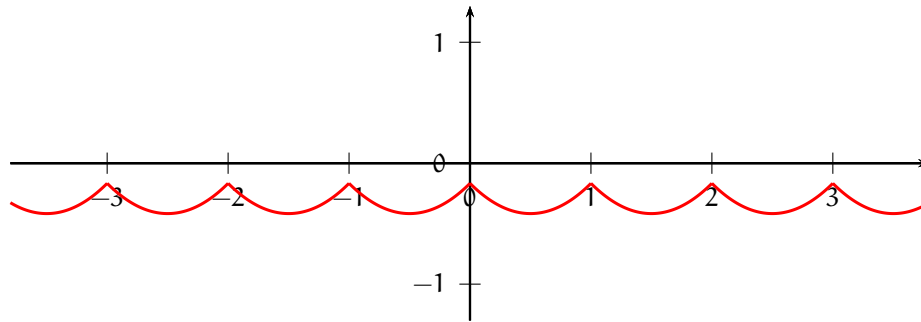
et donc $a = \frac{1}{6}$. Par suite, $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

b) Soit $k \in \{1, 2\}$. On sait que pour tout réel t , $E(t+1) = E(t)+1$ et donc, pour tout réel t , $\widetilde{B}_k(t+1) = B_k(t+1 - E(t+1)) = B_k(t - E(t)) = \widetilde{B}_k(t)$. Donc, la fonction $\widetilde{B}_k$ est 1-périodique.

Ensuite, malheureusement, la fonction $\widetilde{B}_1$ n'est pas continue à gauche en 1 (et plus généralement en tout entier). En effet, pour tout $t \in [0, 1[$, $\widetilde{B}_1(t) = B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ puis $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} \widetilde{B}_1(t) = \frac{1}{2}$. D'autre part, $\widetilde{B}_1(1) = B_1(0) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} \widetilde{B}_1(t)$. La fonction $\widetilde{B}_1$ est néanmoins continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Voici le graphe de la fonction $\widetilde{B}_1$:



Vérifions que la fonction $\widetilde{B}_2$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $\widetilde{B}_2$ est continue sur $[0, 1[$ puis sur tout intervalle de la forme $[k, k+1[$, par 1-périodicité. Ensuite, $\widetilde{B}_2(1) = \widetilde{B}_2(0) = B_2(0) = -\frac{1}{6}$. D'autre part, $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} \widetilde{B}_2(t) = \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} B_2(t) = B_2(1) = -\frac{1}{6} = \widetilde{B}_2(1)$. La fonction $\widetilde{B}_2$ est continue à gauche en 1 puis continue en 1 puis en tout entier relatif par 1-périodicité. Finalement, la fonction $\widetilde{B}_2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Voici son graphe :



D.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1[$, $\widetilde{B}_1(t) = B_1(t-k) = t-k-\frac{1}{2}$ et $B_1(k+1) = B_1(0) = -\frac{1}{2}$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, posons $C_1(t) = t-k-\frac{1}{2}$. Les fonctions C_1 et $\widetilde{B}_1$ ne diffèrent qu'en un point et donc $\int_k^{k+1} \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt = \int_k^{k+1} C_1(t)f'(t) dt$. Ensuite, les fonctions f et C_1 sont de classe C^1 sur le segment $[k, k+1]$. on peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt &= \int_k^{k+1} C_1(t)f'(t) dt = \left[\left(t - k - \frac{1}{2} \right) f(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t) dt. \end{aligned}$$

D.3. L'égalité proposée est claire quand $N = 1$. Soit $N \geq 2$. $\sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt = \int_1^N \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt$ et $\sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_1^N f(t) dt$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} f(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N f(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N f(k) - \frac{1}{2}f(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N f(k) - \frac{1}{2}f(1) \\ &= \sum_{k=1}^N f(k) - \frac{1}{2}(f(1) + f(N)). \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre les égalités de la question précédente, on obtient $\int_1^N \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt = \sum_{k=1}^N f(k) - \frac{1}{2}(f(1) + f(N)) - \int_1^N f(t) dt$ ou encore

$$\sum_{k=1}^N f(k) = \int_1^N f(t) dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(N)) + \int_1^N \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt.$$

D.4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in]k, k+1[$, $\widetilde{B}_2(t) = B_2(t-k)$. Donc, la fonction $\widetilde{B}_2$ est dérivable sur $]k, k+1[$ et pour tout $t \in]k, k+1[$, $\widetilde{B}_2'(t) = B_2'(t-k) = 2B_1(t-k) = 2\widetilde{B}_1(t)$.

Ensuite, avec la même démarche qu'à la question **D.4.** et en tenant compte du fait que $\widetilde{B}_2$ est continue en k et $k+1$, une intégration par parties licite fournit

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt &= \left[\frac{1}{2} \widetilde{B}_2(t)f'(t) \right]_k^{k+1} - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_2(t)f''(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\widetilde{B}_2(k+1)f'(k+1) - \widetilde{B}_2(k)f'(k) \right) - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_2(t)f''(t) dt \\ &= \frac{1}{12} (f'(k+1) - f'(k)) - \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_2(t)f''(t) dt \quad (\text{car } \widetilde{B}_2(k) = \widetilde{B}_2(k+1) = \widetilde{B}_2(0) = \frac{1}{6}). \end{aligned}$$

D.5. Soit $N \geq 2$.

$$\begin{aligned} \int_1^N \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_1(t)f'(t) dt \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{N-1} (f'(k+1) - f'(k)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_2(t)f''(t) dt \\ &= \frac{1}{12} (f'(N) - f'(1)) - \frac{1}{2} \int_1^N \widetilde{B}_2(t)f''(t) dt \quad (\text{somme télescopique}), \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $N = 1$. En incorporant cette égalité à celle obtenue à la question **D.3.**, on obtient

$$\sum_{k=1}^N f(k) = \int_1^N f(t) dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(N)) + \frac{1}{12}(f'(N) - f'(1)) - \frac{1}{2} \int_1^N \widetilde{B}_2(t)f''(t) dt.$$

D.6. Soit $x > -1$. La fonction $\widetilde{B}_2$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et en particulier bornée sur ce segment. Par 1-périodicité, la fonction $\widetilde{B}_2$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de la fonction $|\widetilde{B}_2|$ sur $\mathbb{R}$.

Puisque $x > -1$, la fonction f_x est de classe C^2 sur $[1, +\infty[$ ou encore la fonction f_x'' est définie et continue sur $[1, +\infty[$. Pour tout réel t de $[1, +\infty[$, $f_x''(t) = \frac{(-2)(-3)}{(t+x)^4} = \frac{6}{(t+x)^4}$ puis $|\widetilde{B}_2(t)f_x''(t)| \leq \frac{6M}{(t+x)^4}$. Puisque $4 > 1$, on en déduit que la fonction $\widetilde{B}_2 f_x''$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ ou encore l'intégrale $\int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f_x''(t) dt$ est une intégrale convergente. De plus,

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f_x''(t) dt \right| &\leq \int_1^{+\infty} |\widetilde{B}_2(t)f_x''(t)| dt \leq 6M \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^4} = 6M \left[-\frac{1}{3(t+x)^3} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{M}{2} \frac{1}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $x > -1$, $x^3 \left| \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f_x''(t) dt \right| \leq \frac{M}{2} \frac{x^3}{(x+1)^3} \leq \frac{M}{2}$ et en particulier,

$$\int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f_x''(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

D.7. Soit $x > -1$. La fonction f_x est également intégrable sur $[1, +\infty[$. D'autre part, $\lim_{N \rightarrow +\infty} f(N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f'(N) = 0$. En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité de la question **D.5.**, on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_x(k) = \int_1^{+\infty} f_x(t) dt + \frac{1}{2}f_x(1) - \frac{1}{12}f'_x(1) - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f''_x(t) dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2} dt + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{12} \frac{-2}{(x+1)^3} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f''_x(t) dt \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{6(x+1)^3} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f''_x(t) dt. \end{aligned}$$

Ensuite, $\frac{1}{6(x+1)^3} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_2(t)f''_x(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et d'autre part,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Finalement,

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

2 - Problème d'algèbre

Partie A : diagonalisation simultanée

A.1. Préliminaires

a) Puisque f est diagonalisable, χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, les valeurs propres deux à deux distinctes de f . Puisque f est diagonalisable, $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} E_{\lambda_k}^f$.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $x \in E_{\lambda_k}^f$. Puisque deux polynômes en f commutent,

$$(P(f))(x) = \prod_{j \neq k} (f - \lambda_j \text{Id}_E) \circ (f - \lambda_k \text{Id}_E)(x) = \left(\prod_{j \neq k} (f - \lambda_j \text{Id}_E) \right) (0) = 0.$$

Ainsi, l'endomorphisme $P(f)$ s'annule sur chacun des sous-espaces supplémentaires $E_{\lambda_k}^f$ et on en déduit que $P(f) = 0$.

b) Puisque les polynômes $X - \lambda_k$, $1 \leq k \leq p$, sont deux à deux premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux permet d'écrire : $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)$. Dans cette somme, on supprime les éventuels noyaux réduits à $\{0\}$

et on obtient une égalité de la forme $E = \bigoplus_{1 \leq j \leq q} \text{Ker}(f - \lambda_{k_j} \text{Id}_E)$ où cette fois-ci chacun des $\text{Ker}(f - \lambda_{k_j} \text{Id}_E)$ n'est pas

réduit à $\{0\}$. On considère alors $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition. $\mathcal{B}$ est par construction une base de E constituée de vecteurs propres de f . Donc, f est diagonalisable.

c) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f . $f|_F$ est un endomorphisme de F . Puisque f est diagonalisable, il existe un polynôme P non nul et scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $P(f) = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $(P(f))(x) = 0$. En particulier, pour tout x de F , $(P(f))(x) = 0$ ou encore $P(f|_F) = 0$. Mais alors, $f|_F$ est diagonalisable d'après **b**).

A.2. Preuve du théorème I

a) Soit λ une valeur propre de f . Soit $x \in E_{\lambda}^f$. $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$ et donc $g(x) \in E_{\lambda}^f$. Ceci montre que E_{λ}^f est stable par g .

b) Puisque f est diagonalisable, χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, les valeurs propres deux à deux distinctes de f . Puisque f est diagonalisable, $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} E_{\lambda_k}^f$.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Puisque $f \circ g = g \circ f$, $E_{\lambda_k}^f$ est stable par g d'après **a**). Puisque g est diagonalisable, la restriction g_k de g à $E_{\lambda_k}^f$ est un endomorphisme diagonalisable d'après **D.1.c**). On note $\mathcal{B}_k$ une base de $E_{\lambda_k}^f$ constituée de vecteurs propres de g_k . Chaque vecteur de $\mathcal{B}_k$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k .

Soit $\mathcal{B}$ la famille de vecteurs de E obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_p}$. $\mathcal{B}$ est par construction une base de E constituée de vecteurs propres de f et de g . Le **théorème 1** est démontré.

A.3. Application 1

a) Soient $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$f_A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N)A + (\lambda M + \mu N) = \lambda(AMA + MA) + \mu(AMA + MA) = \lambda f_A(M) + \mu f_A(N).$$

Donc, $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

b) Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(g_A)^k(M) = A^k M = g_{A^k}(M)$ et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(g_A)^k = g_{A^k}$.

Posons alors $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ où $(a_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{K}^{p+1}$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(P(g_A))(M) = \left(\sum_{k=0}^p a_k (g_A)^k \right)(M) = \sum_{k=0}^p a_k g_{A^k}(M) = \sum_{k=0}^p a_k A^k M = P(A)M = g_{P(A)}(M)$$

et donc $P(g_A) = g_{P(A)}$.

c) Puisque A est diagonalisable, il existe un polynôme non nul P , scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples, tel que $P(A) = 0$. D'après la question précédente, $P(g_A) = g_{P(A)} = g_0 = 0$. P est annulateur de g_A , scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et donc g_A est diagonalisable.

d) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $g_A \circ d_A(M) = g_A(MA) = AMA$ et de même, $d_A \circ g_A(M) = AMA$. Donc, $g_A \circ d_A = d_A \circ g_A$.

e) g_A et d_A commutent et g_A et d_A sont diagonalisables. D'après le théorème 1, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de g_A et d_A à la fois. Soit B un élément de $\mathcal{B}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g_A(B) = \lambda B$ et $d_A(B) = \mu B$. Mais alors,

$$f_A(B) = g_A \circ d_A(B) + d_A(B) = (\lambda\mu + \mu)B.$$

B est donc un vecteur propre de f_A . On a ainsi trouvé une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de f_A et donc f_A est diagonalisable.

A.4. Application 2

a) Pour tout réel x , $P'(x) = \sum_{k=1}^p x^{k-1} = 1 + x + \dots + x^{p-1}$. Déjà, si $x \geq 0$, $P'(x) > 0$. Soit $x < 0$. Puisque $x \neq 1$,

$P'(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$. Puisque p est impair, $x^p < 0$ puis $x^p - 1 < 0$ et $x - 1 < 0$ et donc $P'(x) > 0$. Ainsi, la fonction P' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ puis la fonction P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction P est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction P est bijective de $\mathbb{R}$ sur

$$P(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \right[=] -\infty, +\infty[\text{ (car } p \text{ est impair)}.$$

On a montré que la fonction P est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Posons $S = \sum_{k=0}^s a_k X^k$.

$$\begin{aligned} S(D) &= \sum_{k=0}^s a_k (\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))^k = \sum_{k=0}^s a_k \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k) = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^s a_k \alpha_1^k, \dots, \sum_{k=0}^s a_k \alpha_n^k \right) \\ &= \text{diag}(S(\alpha_1), \dots, S(\alpha_n)). \end{aligned}$$

Ensuite, $(WDW^{-1})^0 = I_n = WD^0W^{-1}$ et pour $k \geq 1$,

$$(WDW^{-1})^k = WDW^{-1}WDW^{-1} \dots WDW^{-1} = WDD \dots DW^{-1} = WD^k W^{-1}.$$

Par suite, $S(WDW^{-1}) = \sum_{k=0}^s a_k (WDW^{-1})^k = \sum_{k=0}^s a_k W D^k W^{-1} = W \left(\sum_{k=0}^s a_k D^k \right) W^{-1} = WS(D)W^{-1}$.

c) Pour tout $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, posons $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j}$. On a $L_i(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1$ et pour $j \neq i$,

$$L_i(x_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\ell} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^{\ell} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0. \text{ Donc, pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, \ell \rrbracket^2, L_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Mais alors, pour tout $k \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, $Q(x_k) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i L_i(x_k) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \delta_{i,k} = y_k$.

d) D'après la question b), $Q(P(\Delta)) = \text{diag}(Q(P(\mu_1)), \dots, Q(P(\mu_n))) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta$ puis, toujours d'après la question b)

$$Q(P(B)) = VQ(P(\Delta))V^{-1} = V\Delta V^{-1} = B.$$

Puisque $P(B) = P(A)$, on a encore $Q(P(A)) = B$. Ainsi, $R = P \circ Q$ est un polynôme tel que $R(A) = B$ (erreur d'énoncé).

e) A commute avec tout polynôme en A et en particulier avec $R(A) = B$.

f) Puisque A et B commutent et sont diagonalisables, A et B sont simultanément diagonalisables. Il existe donc $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $W \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = WDW^{-1}$ et $B = W\Delta W^{-1}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} P(A) = P(B) &\Rightarrow WP(D)W^{-1} = WP(\Delta)W^{-1} \text{ (d'après b)} \\ &\Rightarrow P(D) = P(\Delta) \text{ (car } W \text{ est inversible)} \\ &\Rightarrow \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = \text{diag}(P(\mu_1), \dots, P(\mu_n)) \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(\lambda_i) = P(\mu_i) \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i \text{ (car la fonction } P \text{ est injective d'après a)} \\ &\Rightarrow D = \Delta \Rightarrow WDW^{-1} = W\Delta W^{-1} \\ &\Rightarrow A = B. \end{aligned}$$

Partie B : diagonalisation simultanée des matrices symétriques

B.1. Preuve du théorème II Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On sait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = Q^T \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) Q$. De plus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = A$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée pour φ . Donc

$$I_n = Q^T A Q.$$

b) $C^T = Q^T B^T (Q^T)^T = Q^T B Q = C$. C est symétrique réelle et donc C est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (réelle) d'après le théorème spectral. Par suite, il existe $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $R \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $C = R^T D R$.

c) D'une part,

$$B = (Q^{-1})^T C Q^{-1} = (Q^{-1})^T R^T D R Q^{-1} = (R Q^{-1})^T D (R Q^{-1}).$$

D'autre part, $Q^T A Q = I_n$ et donc, en tenant compte du fait que R est orthogonale de sorte que $R^T R = I_n$,

$$A = (Q^{-1})^T Q^{-1} = (Q^{-1})^T R^T R Q^{-1} = (R Q^{-1})^T (R Q^{-1}).$$

La matrice $P = R Q^{-1}$ est une matrice inversible en tant que produit de deux matrices inversibles et de plus $A = P^T P$ et $B = P^T D P$.

B.2. Application Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrons que pour tout $n \geq 2$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ ($\mathcal{P}_n$).

• Le résultat est vrai quand $n = 2$ par définition d'une fonction convexe.

• Soit $n \geq 2$. Supposons ($\mathcal{P}_n$). Soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ puis $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ (réels positifs de somme nulle). Dans ce cas, l'inégalité à démontrer est immédiate.

Sinon, $\lambda_{n+1} \in [0, 1[$ et on peut écrire $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}$. Les n réels $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}$ sont positifs et de plus $\sum_{i=1}^n \lambda'_i = \frac{1}{1 - \lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Puisque I est un convexe de $\mathbb{R}$, le réel $x = \sum_{i=1}^n \lambda'_i x_i$ est un élément de I et on a

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f((1 - \lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1})f(x) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \quad (\text{car } f \text{ est convexe sur } I) \\ &= (1 - \lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^n \lambda'_i x_i\right) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \lambda'_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

b) La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout réel x , $h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$ puis, pour tout réel x , $h''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$. La fonction h'' est positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction h est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soient $n \geq 2$ puis $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0, +\infty[^n$. D'après la question a), on a $h\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(\lambda_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} h(\ln(\lambda_i))$. Or,

$$h\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(\lambda_i)\right) = h\left(\ln\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \ln\left(1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{1}{n}}\right)$$

et

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} h(\ln(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(1 + \lambda_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Ainsi, $\ln\left(1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{\frac{1}{n}}\right)$ puis, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{\frac{1}{n}}.$$

c) Déjà, $\det(I_n)^{\frac{1}{n}} + \det(D)^{\frac{1}{n}} = 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{\frac{1}{n}} = \det(I_n + D)^{\frac{1}{n}}$. Ensuite, $\det(P^T) \det(P) = (\det(P))^2 > 0$ et donc $((\det(P^T)) \det(P))^{\frac{1}{n}}$ existe et est strictement positif. On peut alors écrire

$$(\det(P^T) \det(P))^{\frac{1}{n}} \left(\det(I_n)^{\frac{1}{n}} + \det(D)^{\frac{1}{n}} \right) \leq (\det(P^T) \det(P))^{\frac{1}{n}} \det(I_n + D)^{\frac{1}{n}}$$

puis

$$(\det(P^T P))^{\frac{1}{n}} + (\det(P^T D P))^{\frac{1}{n}} \leq (\det(P^T P + P^T D P))^{\frac{1}{n}}$$

et finalement

$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}} \leq (\det(A + B))^{\frac{1}{n}}.$$