

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^2 \ln(x) = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 0 = f(0)$. Par suite, la fonction f est continue en 0.

Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 5x + 2 - 2x \ln(x)$ puis, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$. La fonction f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = 2$.

2. Pour tout $x > 1$, $f(x) = -2x^2 \ln(x) \left(1 - \frac{5}{2 \ln(x)} - \frac{1}{x \ln(x)}\right)$. Ensuite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{2 \ln(x)} - \frac{1}{x \ln(x)}\right) = 1 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 \ln(x) = -\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = 10x + 2 - 2 \left(2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = 8x + 2 - 4x \ln(x).$$

De plus, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$. On note alors que la fonction f' est continue en 0 à droite. Ensuite, la fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = 8 - 4 \ln(x) - 4 = 4(1 - \ln(x)).$$

Pour tout $x > 0$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$ et de même, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Enfin, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$. Voici le tableau de variations de la fonction f' :

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f'	2	$4e + 2$	$-\infty$

4. L'aire demandée est $\mathcal{A} = \int_1^e (5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)) \, dx = \int_1^e (5x^2 + 2x) \, dx - 2 \int_1^e x^2 \ln(x) \, dx$. Déjà,

$$\int_1^e (5x^2 + 2x) \, dx = \left[\frac{5x^3}{3} + x^2 \right]_1^e = \frac{5e^3}{3} + e^2 - \frac{8}{3}.$$

Ensuite, à l'aide d'une intégration par parties,

$$\int_1^e x^2 \ln(x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

On en déduit que $\mathcal{A} = \frac{5e^3}{3} + e^2 - \frac{8}{3} - 2 \left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{11e^3}{9} + e^2 - \frac{26}{9}$.

5. La fonction f' est strictement croissante sur $[0, e]$ et $f'(0) = 2 > 0$ et de plus la fonction f' est continue en 0. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $[0, e]$. D'autre part, la fonction f' est continue et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$ et de plus, $f'(e) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty < 0$. On en déduit que la fonction f' s'annule une fois et une seule en un certain réel α de $[e, +\infty[$. De plus, la fonction f' étant strictement décroissante sur cet intervalle, on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $[0, \alpha]$ et strictement négative sur $] \alpha, +\infty[$.

En résumé, La fonction f' est strictement positive sur $[0, \alpha[$, strictement négative sur $]\alpha, +\infty[$ et s'annule en α . La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. Par suite, la fonction f admet un maximum en α .

L'égalité $f'(\alpha) = 0$ fournit $8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0$ puis $2\alpha \ln(\alpha) = 4\alpha + 1$. Mais alors,

$$f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha.$$

Exercice 2

1. a) Pour tout réel $x \in]-1, 1[$,

$$g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

b) Par suite,

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} [-\ln(1-x) + \ln(1+x)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right) = \frac{\ln(3)}{2}.$$

2. En posant $x = \sin(\theta)$ et donc $dx = \cos(\theta) \, d\theta$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-\sin^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} \times dx = I = \frac{\ln(3)}{2}.$$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} 1 - p_{n+1} &= \mathbb{P}(\overline{F_{n+1}}) = \mathbb{P}(F_n) \times \mathbb{P}(\overline{F_{n+1}}|F_n) + \mathbb{P}(\overline{F_n}) \times \mathbb{P}(\overline{F_{n+1}}|\overline{F_n}) \\ &= 0,9p_n + 0,3(1 - p_n) = 0,6p_n + 0,3, \end{aligned}$$

puis $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,7$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{7}{16} = -0,6p_n + 0,7 - \frac{7}{16} = -0,6p_n + \frac{7}{10} - \frac{7}{16} = -0,6p_n + \frac{21}{80} \\ &= -0,6p_n + \frac{6}{10} \times \frac{7}{16} = -0,6 \left(p_n - \frac{7}{16} \right) = -0,6u_n. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite géométrique de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$ et de raison $q = -0,6$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{9}{16}(-0,6)^{n-1}$ puis $p_n = \frac{7}{16} + u_n = \frac{7}{16} + \frac{9}{16}(-0,6)^{n-1}$.

Puisque $-0,6 \in]-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,6)^{n-1} = 0$ puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{7}{16} \neq 0.$$

Exercice 4

1. a) X_n prend deux valeurs à savoir 1 et $n+1$.

b) Puisque l'échantillon est assimilé à n tirages successifs avec remise, $\mathbb{P}(X_n = 1) = (0,95)^n$ et donc aussi $\mathbb{P}(X_n = n+1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - (0,95)^n$. Donc,

$$\mathbb{E}(X_n) = 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) + (n+1)\mathbb{P}(X_n = n+1) = (0,95)^n + (n+1)(1 - (0,95)^n) = n+1 - n(0,95)^n.$$

2. La méthode 2 est plus économique que la méthode 1 si et seulement si $\mathbb{E}(X_n) < n$. Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) < n &\Leftrightarrow n + 1 - n(0,95)^n < n \Leftrightarrow 1 < n(0,95)^n \\ &\Leftrightarrow \ln(1) < \ln(n(0,95)^n) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,95) + \ln(n) > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la méthode 2 est plus économique que la méthode 1 si et seulement si $n \ln(0,95) + \ln(n) > 0$.

3. D'après les résultats admis par l'énoncé, la fonction f est strictement positive sur $[20, 87]$ et strictement négative sur $[88, +\infty]$. Par suite, si $20 \leq n \leq 87$, la méthode 2 est plus économique et si $n \geq 88$, la méthode 1 est plus économique.

Exercice 5

$$1. z_0 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}e^z = z_0 &\Leftrightarrow e^x e^{iy} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow e^x = 2 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} / y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (\text{égalité de deux nombres complexes non nuls sous forme trigonométrique}) \\ &\Leftrightarrow x = \ln(2) \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} / y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = \ln(2) + \frac{\pi}{3} + 2k\pi.\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $e^z = z_0$ sont les nombres complexes de la forme $\ln(2) + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_0^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$. Ensuite,

$$z_0^n \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / n = 6k.$$

Les entiers naturels n tels que z_0^n soit un réel positif sont les multiples de 6.

Exercice 6

$$1. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{\sqrt{k}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}V_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &\geq 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \dots + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{1}) \\ &= 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$ et on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty.$$