ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA – ABIDJAN	INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA – YAOUNDÉ
ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR	ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ET DE MANAGEMENT ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Donner un développement limité d'ordre 4 de f en 0.

2. Etudier les variations de f, ainsi que sa convexité et tracer son graphe.

3. La fonction f admet-elle un centre de symétrie ? un axe de symétrie ?

4. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n° 2

On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = Ln(x^2 - 5x + 6)$.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

2. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n° 3

Soit la fonction réelle *f* définie sur les réels positifs par : $f(x) = \begin{cases} x^2\, E\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$, où *E(x)* désigne la partie entière du nombre réel *x*.

1. Etudier la continuité de *f* sur R^+.

2. Etudier la dérivabilité de *f* sur R^+.

3. Calculer $I = \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)dx$.

Exercice n° 4

On note *E* l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels. Autres notations :

$O_n(R)$ l'ensemble des matrices orthogonales de *E*,

$D_n(R)$ l'ensemble des matrices de *E*, diagonalisables dans *R*, et

$S_n(R) = \{M = (a_{i\,j)} \in E\ /\ a_{i\,j)} \geq 0\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1\}$ (Les matrices de cet ensemble s'appellent stochastiques).

1. L'ensemble $O_n(R)$ est-il convexe dans *E* ?

2. L'ensemble $D_n(R)$ est-il convexe dans *E* ?

3. L'ensemble $S_n(R)$ est-il convexe dans *E* ?

4. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de cette matrice *M*.

5. Montrer que toutes les matrices de l'ensemble $S_n(R)$ admettent une même valeur propre quel que soit *n*>1.

Exercice n° 5

On note $M_n(R)$ l'espace des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.
On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(R)$ est nilpotente si et seulement si $\exists\ p \in N^*/\ A^p = 0$ (le plus petit *p* s'appelle l'indice nilpotent).

1. Si *A* est une matrice nilpotente, montrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.

2. Soit *A* est une matrice nilpotente, montrer que toutes ses valeurs propres sont nulles et déterminer son polynôme caractéristique.

3. Soit A est une matrice nilpotente, montrer que : $\forall\, k = 1, 2, \ldots n,\ Tr(A^k) = 0$, où Tr désigne la trace. On rappelle que la trace d'une matrice est la somme des éléments de sa diagonale.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, calculer $A^n, \forall\, n \geq 1$.

5. Pour $A, B \in M_n(R)$ vérifiant $AB = BA$, où A est inversible et B nilpotente. Comparer $\det(A + B)$ et $\det(A)$.

Exercice n° 6

On note $M_n(R)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit φ l'application définie sur $M_n(R) \times M_n(R)$ par $\varphi(A, B) = Tr\,(A^{'}B)$ où Tr désigne la trace et $A^{'}$ la transposée de la matrice A.

1. Vérifier que φ est une forme bilinéaire.
2. φ est-elle symétrique ? Définie positive ?
3. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $M_2(R)$.
4. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $N = B + \frac{1}{2}\, I$ (où I est la matrice unité d'ordre 4). Etudier la diagonalisation de N (on précisera ses valeurs propres).