ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Pour tout nombre réel α, on désigne par E_α le sous-espace vectoriel des fonctions f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continues et vérifiant

$$t \mapsto f(t)e^{-\alpha t} \text{ est bornée sur } [0, +\infty[.$$

On note par F_α l'espace défini par

$$F_\alpha = \bigcap_{\beta > \alpha} E_\beta.$$

On note de plus par C_α^∞ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $]\alpha, +\infty[$. Pour une telle fonction f, on notera $f^{(p)}$, pour $p \in \mathbb{N}$, sa dérivée p-ième avec la convention $f^{(0)} = f$.

On définit la transformée de Laplace comme étant l'application L qui à tout élément $f \in F_\alpha$ fait correspondre la fonction $L[f]$ définie sur $]\alpha, +\infty[$ par

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

Partie 1

1. Montrer que $\alpha < \delta \Rightarrow E_\alpha \subset E_\delta$.

2. En déduire que $E_\alpha \subset F_\alpha$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in E_\alpha$ et $s > \alpha$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ est absolument convergente.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier que l'application L est bien définie sur F_α, c'est à dire que pour tout $f \in F_\alpha$, $L[f](s)$ est fini pour tout $s > \alpha$.

5. Vérifier que pour $f \in F_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est dans F_α.

Partie 2

L'objectif de cette partie est d'obtenir l'expression de la dérivée de la transformée de Laplace, ainsi que de la transformée de Laplace d'une dérivée, et de même pour les dérivées successives.

6. Soit $s > \alpha$ et $(s_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque dans $]\alpha, +\infty[$ qui converge vers s. Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on introduit la suite de fonctions $(\Delta_{p,n}(s,t))_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $]\alpha, +\infty[\times [0, +\infty[$ par
$$\Delta_{p,n}(s,t) = \frac{(-t)^p e^{-st} f(t) - (-t)^p e^{-s_n t} f(t)}{s - s_n}.$$
Montrer que pour tout $s > \alpha$,
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \Delta_{p,n}(s,t) dt = \int_0^{+\infty} (-t)^{p+1} e^{-st} f(t) dt.$$

7. En déduire que L est une application de F_α dans C_α^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$(L[f])^{(p)} = (-1)^p L[t^p f(t)],$$
où l'on note abusivement $t^p f(t)$ la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ définie sur $[0, +\infty[$.

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi_k(t) = t^k e^{at}$.
   a) Préciser le plus petit α pour lequel $\varphi_0 \in F_\alpha$ et déterminer $L[\varphi_0]$.
   b) En déduire, pour tout $k \geq 0$, le plus petit α pour lequel $\varphi_k \in F_\alpha$ et déterminer $L[\varphi_k]$.

9. Soit f une fonction continument dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f \in F_\alpha$ et $f' \in F_\alpha$. Montrer que pour tout $s > \alpha$
$$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0).$$

10. Soit f une fonction p fois continument dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f^{(k)} \in F_\alpha$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, p$. Donner l'expression de $L[f^{(p)}]$ en généralisant l'égalité précédente.

Partie 3

On s'intéresse dans cette partie à l'application de la transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles.

On considère dans un premier temps l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = e^t \quad \text{avec} \quad y''(0) = y'(0) = y(0) = 1. \tag{1}$$

On admet que la solution y de (1) sur $\mathbb{R}$ est unique. On cherche à déterminer cette solution.

11. On cherche la solution y de (1) parmi les fonctions appartenant à F_1 et dont les dérivées successives appartiennent également à F_1.

    a) Justifier que sous cette hypothèse on peut appliquer L à chaque terme de l'équation (1) et préciser à quel ensemble l'image obtenue appartiendra.

    b) Déterminer l'expression de $L[y]$.

12. Donner toutes les solutions à (1) trois fois continument dérivables sur $\mathbb{R}$.

On considère à présent l'équation différentielle, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) + ny(t) = 0. \tag{2}$$

13. On s'intéresse aux solutions y de l'équation différentielle (2) appartenant à F_1 et dont les dérivées successives appartiennent également à F_1.

    a) Justifier que l'on peut appliquer L à chaque terme de l'équation (2) et préciser à quel ensemble l'image obtenue appartiendra.

    b) Montrer que $L[y]$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.

    c) Trouver des solutions sur $]1, +\infty[$ de l'équation précédente et en déduire qu'il existe un polynôme P non-nul, que l'on déterminera, tel que l'ensemble des fonctions $\{t \mapsto \lambda P(t),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont solutions de l'équation différentielle (2) sur $\mathbb{R}$.

14. Pourquoi l'ensemble des solutions précédentes ne contient pas toutes les solutions de (2) sur $]0, +\infty[$?

15. On cherche finalement à trouver toutes les solutions de (2).

    a) On suppose que y et z sont deux solutions non-colinéaires de (2) sur $]0, +\infty[$. On définit le Wronskien par $W(t) = y(t)z'(t) - z(t)y'(t)$. On suppose que $W(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$. Montrer que pour $t > 0$, $W'(t)/W(t) = (t-1)/t$ et en déduire la forme de $W(t)$.

    b) On note $A(t)$ une primitive de $t \mapsto e^t/(tP^2(t))$ où P est le polynôme déterminé dans la question 13 c). Donner l'ensemble des solutions de (2) sur un intervalle de $]0, +\infty[$ ne contenant pas les racines de P.

2 Problème d'algèbre

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On note 0 le vecteur nul de E et id_E l'endomorphisme identité de E. On note de plus $f^0 = id_E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $f_{|F}$ la restriction de f à F. Pour rappel, on dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$K_n = Ker(f^n), \qquad I_n = Im(f^n).$$

Partie 1

1. Montrer que :
   a) la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
   b) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   a) K_n est stable par f ;
   b) I_n est stable par f.

On pose :

$$K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n, \qquad I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

3. Vérifier que K et I sont des sous-espaces vectoriels de E.
4. Montrer que K et I sont stables par f.
5. Etablir les équivalences
   a) f injectif $\Leftrightarrow K = \{0\}$;
   b) f surjectif $\Leftrightarrow I = E$.
6. Pour les exemples suivants, déterminer I, K et montrer que
   — $E = I \oplus K$;
   — $f_{|K}$ est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $f_{|K}^q = 0$;
   — $f_{|I}$ est un automorphisme de I dans I.
   a) f est une projection, c'est à dire $f^2 = f$.
   b) Pour $d \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_d[X]$ est le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d, et f est l'opérateur dérivation sur E.
7. Montrer que la propriété $E = I \oplus K$ est fausse si f est l'opérateur dérivation sur $E = \mathbb{R}[X]$, où $\mathbb{R}[X] = \cup_{d\in\mathbb{N}}\mathbb{R}_d[X]$.

Partie 2

Nous supposons dans la suite du problème que E est de dimension finie. Nous allons montrer que les propriétés énoncées dans la question 6 sont toujours vraies dans ce cadre.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(K_n = K_{n+1}) \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{N},\ K_n = K_{n+p})$.

9. Soit $m = \inf\{n \in \mathbb{N},\ K_n = K_{n+1}\}$. Montrer que m est fini et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_{m+p} = K$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $(K_n = K_{n+p}) \Leftrightarrow (I_n = I_{n+p})$.

11. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{m+p} = I$.

12. Montrer que $f_{|K}$ est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $f_{|K}^q = 0$.

13. Montrer que $f_{|I}$ est un automorphisme de I dans I.

14. Vérifier que pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $f^m(x) = f^{2m}(y)$.

15. En déduire que $E = I \oplus K$.

16. Montrer la réciproque du résultat précédent, c'est à dire : si $E = F \oplus G$ avec F et G stables par f et tels que $f_{|F}$ est un automorphisme et $f_{|G}$ est nilpotente, alors nécessairement $F = I$ et $G = K$.