SESSION 2023

CAPESA

PREMIERE COMPOSITION

I - Problème d'analyse

Partie I

1. Soit $(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \delta$. Soit $f \in E_\alpha$. Donc, f est continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de plus la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ est bornée sur $[0, +\infty[$. Soit M un majorant de la fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-\alpha t}$ sur $[0, +\infty[$. Pour $t \in [0, +\infty[$,

$$\left|f(t)e^{-\delta t}\right| = |f(t)|e^{-\alpha t} \times e^{-(\delta-\alpha)t} \leqslant M \times 1 = M.$$

Donc, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\delta t}$ est bornée sur $[0, +\infty[$ puis $f \in E_\delta$. On a montré que $E_\alpha \subset E_\delta$.

2. D'après la question précédente, pour tout $\beta > \alpha$, $E_\alpha \subset E_\beta$ et donc $E_\alpha \subset \displaystyle\bigcap_{\beta > \alpha} E_\beta = F_\alpha$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $f \in E_\alpha$ puis M un majorant de la fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-\alpha t}$ sur $[0, +\infty[$.
Soit $s > \alpha$. La fonction $t \mapsto f(t)e^{-st}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ensuite, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\left|e^{-st}f(t)\right| = |f(t)|e^{-\alpha t} \times e^{-(s-\alpha)t} \leqslant Me^{-(s-\alpha)t}.$$

Puisque $s - \alpha > 0$, la fonction $t \mapsto Me^{-(s-\alpha)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)e^{-st}$ ou encore l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ est une intégrale absolument convergente.

4. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ puis $f \in F_\alpha$. Soit $s > \alpha$. f est alors un élément de E_β où $\beta = \dfrac{s+\alpha}{2} > \alpha$. Puisque $s > \beta$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ est une intégrale absolument convergente d'après la question précédente et donc $L[f](s)$ existe dans $\mathbb{R}$.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $f \in F_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Soient $\beta > \alpha$ puis $\beta' = \dfrac{\alpha+\beta}{2} > \alpha$. La fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ensuite, la fonction f est dans $E_{\beta'}$ et donc il existe M tel que pour tout $t \geqslant 0$, $\left|f(t)e^{-\beta' t}\right| \leqslant M$. Pour $t \geqslant 0$,

$$\left|f(t)t^n e^{-\beta t}\right| = \left|f(t)e^{-\beta' t}\right| t^n e^{-(\beta-\beta')t} \leqslant Mt^n e^{-(\beta-\beta')t}.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto Mt^n e^{-(\beta-\beta')t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Cette fonction est donc bornée sur $[0, +\infty[$. Il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)t^n e^{-\beta t}$ et donc la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est dans E_β.

Ainsi, pour tout $\beta > \alpha$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est dans E_β et finalement, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est dans F_α.

Partie II

6. Soient $s > \alpha$ et $p \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0, +\infty[$. Puisque $s_n \underset{n \to +\infty}{\to} s$, le rapport $\dfrac{e^{-st} - e^{-s_n t}}{s - s_n}$ tend vers le nombre dérivé de la fonction $u \mapsto e^{-tu}$ en s à savoir $-te^{-st}$. Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta_{p,n}(s,t) = (-t)^p f(t) \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-st} - e^{-s_n t}}{s - s_n} = (-t)^{p+1} e^{-st} f(t).$$

Ainsi, la suite de fonctions $(t \mapsto \Delta_{p,n}(s,t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto (-t)^{p+1} e^{-st} f(t)$ sur $[0, +\infty[$.

Ensuite, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe c_n compris entre s et s_n tel que $\dfrac{e^{-st} - e^{-s_n t}}{s - s_n} = -te^{-c_n t}$. Maintenant, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $s_n \geqslant s - \dfrac{s-\alpha}{2} = \dfrac{s+\alpha}{2}$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant \text{Min}\left\{s_0, s_1, \ldots, s_{n_0}, \dfrac{s+\alpha}{2}\right\}$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n \geqslant \text{Min}\{s, s_n\} \geqslant \text{Min}\left\{s_0, s_1, \ldots, s_{n_0}, \frac{s+\alpha}{2}\right\}.$$

Posons $c = \text{Min}\left\{s_0, s_1, \ldots, s_{n_0}, \dfrac{s+\alpha}{2}\right\} > \alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, +\infty[$,

$$|\Delta_{p,n}(s,t)| = \left|(-t)^{p+1} f(t) e^{-c_n t}\right| \leqslant t^{p+1}|f(t)|e^{-ct} = \varphi(t).$$

D'après la question 5, la fonction $t \mapsto t^{p+1}f(t)$ est dans F_α et donc, puisque $c > \alpha$, d'après la question 4, la fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

En résumé,

- la suite de fonctions $(t \mapsto \Delta_{p,n}(s,t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto (-t)^{p+1}e^{-st}f(t)$ sur $[0, +\infty[$ et la fonction $t \mapsto (-t)^{p+1}e^{-st}f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$,
- il existe une fonction φ, continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, $|\Delta_{p,n}(s,t)| \leqslant \varphi(t)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- chaque fonction $t \mapsto \Delta_{p,n}(s,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$,
- (la fonction $t \mapsto (-t)^{p+1}e^{-st}f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$),
- la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \Delta_{p,n}(s,t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \Delta_{p,n}(s,t)\ dt = \int_0^{+\infty} (-t)^{p+1}e^{-st}f(t)\ dt.$$

7. Soit $f \in F_\alpha$. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $L[f]$ est p fois dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ et que $(L[f])^{(p)} = (-1)^p L\left[t^p f(t)\right]$.

- Soit $s_0 > \alpha$. D'après la question précédente, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]\alpha, +\infty[^{\mathbb{N}}$ convergeant vers s_0,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{L[f]\,(u_n) - L[f]\,(s_0)}{u_n - s_0} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n - s_0}\left(\int_0^{+\infty} e^{-u_n t}f(t)\ dt - \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t}f(t)\ dt\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \Delta_{0,n}\,(s_0,t)\ \ dt = -\int_0^{+\infty} te^{-s_0 t}f(t)\ dt.\end{aligned}$$

On sait alors que la fonction $s \mapsto \dfrac{L[f]\,(s) - L[f]\,(s_0)}{s - s_0}$ a une limite réelle quand s tend vers s_0 et que

$$\lim_{s\to s_0} \frac{L[f]\,(s) - L[f]\,(s_0)}{s - s_0} = -\int_0^{+\infty} te^{-s_0 t}f(t)\ dt.$$

Dit autrement, la fonction $L[f]$ est dérivable en tout s_0 de $]\alpha, +\infty[$ et pour $s_0 \in]\alpha, +\infty[$,

$$(L[f])'\,(s_0) = -\int_0^{+\infty} te^{-s_0 t}f(t)\ dt = -L[tf(t)]\,(s_0)\,.$$

L'affirmation est donc vraie quand $p = 1$.

- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $L[f]$ est p fois dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ et $(L[f])^{(p)} = (-1)^p L\left[t^p f(t)\right]$. pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]\alpha, +\infty[^{\mathbb{N}}$ convergeant vers s_0,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{(L[f])^{(p)}\,(u_n) - (L[f])^{(p)}\,(s_0)}{u_n - s_0} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n - s_0}\left(\int_0^{+\infty} (-t)^p e^{-u_n t}f(t)\ dt - \int_0^{+\infty} (-t)^p e^{-s_0 t}f(t)\ dt\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \Delta_{p,n}\,(s_0,t)\ \ dt = \int_0^{+\infty} (-t)^{p+1}e^{-s_0 t}f(t)\ dt.\end{aligned}$$

Comme précédemment, la fonction $(L[f])^{(p)}$ est dérivable en tout s_0 de $]\alpha, +\infty[$ et pour $s_0 \in]\alpha, +\infty[$,
$(L[f])^{(p+1)}\,(s_0) = \left((L[f])^{(p)}\right)'(s_0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (-t)^{p+1}e^{-s_0 t}f(t)\ dt = (-1)^{p+1}L\left[t^{p+1}f(t)\right](s_0)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

8. a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta > a$, la fonction $t \mapsto e^{-\beta t}\varphi_0(t) = e^{-(\beta - a)t}$ est bornée sur $[0, +\infty[$ (car décroissante de 1 à 0). Donc $\varphi_0 \in F_a$.

Si $\beta < a$, la fonction $t \mapsto e^{-\beta t}\varphi_0(t) = e^{-(\beta-a)t}$ n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$ (car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(\beta-a)t} = +\infty$). Donc, si $\alpha < a$, il existe $\beta \in]\alpha, a[$ tel que $\varphi_0 \notin E_\beta$, à savoir $\beta = \dfrac{\alpha+a}{2}$, puis $\varphi_0 \notin F_\alpha$.

Donc, le plus petit α tel que $\varphi_0 \in F_\alpha$ est $\alpha = a$. Ensuite, pour tout $s > a$,

$$L[\varphi_0](s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\ dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

b) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente et la question 5), $\varphi_k \in F_a$. Puis, comme à la question précédente, si $\alpha < a$, $\varphi_k \notin F_\alpha$. Donc, le plus petit α tel que $\varphi_0 \in F_\alpha$ est $\alpha = a$. Ensuite, pour tout $s > a$,

$$L[\varphi_k](s) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-(s-a)t}\ dt = L[t^p\varphi_0](s) = (-1)^k \left(L[\varphi_0]\right)^{(k)}(s) = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}.$$

9. Soit $s > \alpha$. Vérifions d'abord que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-st}f(t) = 0$. Puisque $\dfrac{\alpha+s}{2} > \alpha$, la fonction f est dans $E_{\frac{\alpha+s}{2}}$. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|f(t)|e^{-\frac{(\alpha+s)t}{2}} \leqslant M$. Mais alors, pour tout $t \in [0,+\infty[$,

$$|f(t)|e^{-st} = |f(t)|e^{-\frac{(\alpha+s)t}{2}} \times e^{-\frac{(s-\alpha)t}{2}} \leqslant Me^{-\frac{(s-\alpha)t}{2}}$$

avec $s - \alpha > 0$. Le théorème des gendarmes montre alors que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} = 0$.

Les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{-st}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Au vu de la convergence de chacun des termes en $+\infty$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}L[f'](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)\ dt = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-se^{-st}\right)f(t)\ dt \\ &= 0 - f(0) + s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\ dt = sL[f](s) - f(0).\end{aligned}$$

10. En appliquant aux fonctions $f, f', \ldots, f^{(p-1)}$, on obtient pour tout $s > \alpha$, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $L\left[f^{(k+1)}\right](s) = sL\left[f^{(k)}\right](s) - f^{(k)}(0)$ puis $s^{p-(k+1)}L\left[f^{(k+1)}\right](s) = s^{p-k}L\left[f^{(k)}\right](s) - s^{p-1-k}f^{(k)}(0)$. On additionne membre à membre ces égalités et on obtient par télescopage pour tout $s > \alpha$,

$$L\left[f^{(p)}\right](s) - s^pL[f](s) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(s^{p-(k+1)}L\left[f^{(k+1)}\right](s) - s^{p-k}L\left[f^{(k)}\right](s)\right) = -\sum_{k=0}^{p-1} s^{p-1-k}f^{(k)}(0).$$

On a montré que

$$\forall s > \alpha,\ L\left[f^{(p)}\right](s) = s^pL[f](s) - \sum_{k=0}^{p-1} s^{p-1-k}f^{(k)}(0).$$

Partie III

11. (a) Par hypothèse, y, y', y'' et $y^{(3)}$ sont dans F_1. L'énoncé a admis que chaque E_β, $\beta > \alpha$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ et donc F_1 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ en tant qu'intersection de sous-espaces de cet espace. Ainsi, $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y$ est dans F_1 puis on peut appliquer L au membre de gauche sur $]1,+\infty[$. La fonction de s obtenue est un élément de C_1^∞ d'après la question 7.

D'autre part, la fonction $t \mapsto e^t$ est dans F_1 d'après la question 8 et son image par L est dans C_1^∞.

(b) Pour $s > 1$, $L\left[y^{(3)}\right](s) = s^3L[f](s) - y''(0) - sy'(0) - s^2f(0) = s^3L[f](s) - s^2 - s - 1$ puis $L\left[y''\right](s) = s^2L[f](s) - y'(0) - sy(0) = s^2L[f](s) - s - 1$ puis $L[y'](s) = sL[y](s) - 1$. Par linéarité, pour tout $s > 1$,

$$\begin{aligned}L\left[y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y\right](s) &= L\left[y^{(3)}\right](s) - 3L[y''](s) + 3L[y'](s) - L[y](s) \\ &= \left(s^3 - 3s^2 + 3s - 1\right)L[f](s) - \left(s^2 + s + 1\right) + 3(s+1) - 3 \\ &= \left(s^3 - 3s^2 + 3s - 1\right)L[f](s) - s^2 + 2s - 1 = (s-1)^3L[f](s) - (s-1)^2.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la question 8), pour tout $s > 1$, $L\left[e^t\right](s) = \dfrac{1}{s-1}$. On en déduit que pour tout $s > 1$,

$$L[y](s) = \frac{1}{(s-1)^3}\left((s-1)^2 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^4}.$$

12. D'après la question 9)b), la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{(s-1)^4}$ est la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{3!}t^3e^t$. La fonction y a donc même transformée de Laplace que la fonction $y_1 \ : \ t \mapsto \left(\dfrac{t^3}{6} + 1\right)e^t$.

Réciproquement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1'(t) = \left(\dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2} + 1\right)e^t$ et en particulier, $y_1'(0) = 1$. Ensuite, pour tout réel t,

$$y_1''(t) = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + 1 + \frac{t^2}{2} + t\right)e^t = \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + t + 1\right)e^t$$

et en particulier, $y_1''(0) = 1$. Ensuite, pour tout réel t,

$$y_1^{(3)}(t) = \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + t + 1 + \frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)e^t = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} + 3t + 2\right)e^t$$

Enfin, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}y_1^{(3)}(t) - 3y_1''(t) + 3y_1'(t) - y(t) &= \left(\left(\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} + 3t + 1\right) - 3\left(\frac{t^3}{6} + t^2 + t + 1\right) + 3\left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{t^3}{6} + 2\right)\right)e^t \\ &= e^t.\end{aligned}$$

Par unicité, $y = y_1$ et donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \left(\frac{t^3}{6} + 1\right)e^t.$$

13. (a) D'après la question 5), les fonctions $t \mapsto ty''(t)$ et $t \mapsto (1-t)y'(t)$ sont dans F_1. Puisque F_1 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, +\infty[$, il en est de même de la fonction
$t \mapsto ty''(t) + (1-t)y'(t) + ny(t)$. On peut donc calculer son image par L est on obtient une fonction de C_1^∞.

(b) D'après la question 10), pour tout $s > 0$, $L[y''](s) = s^2L[y](s) - sy(0) - y'(0)$ puis

$$L[ty''](s) = -(L[y''])'(s) = -2sL[y](s) - s^2(L[y])'(s) + y(0).$$

Ensuite, pour tout $s > 0$, $L[y'](s) = sL[y](s) - y(0)$ puis

$$L[ty'](s) = -(L[y])'(s) = -L[y](s) - s(L[y])'(s).$$

On en déduit que pour tout $s > 0$,

$$\begin{aligned}L[ty'' + (1-t)y' + ny](s) &= [L[ty''](s) + L[y'](s) - L[ty'](s) + nL[y](s) \\ &= -2sL[y](s) - s^2(L[y])'(s) + y(0) + sL[y](s) - y(0) + L[y](s) + s(L[y])'(s) + nL[y](s) \\ &= \left(-s^2 + s\right)(L[y])'(s) + (-s + n + 1)L[y](s).\end{aligned}$$

Puisque $L[0] = 0$, on en déduit que la fonction $L[y]$ est solution sur $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$s(s-1)z' + (s-n-1)z = 0 \quad .$$

(c) Soit z une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall s>1,\ s(s-1)z'(s)+(s-n-1)z(s)=0 &\Leftrightarrow \forall s>1,\ z'(s)+\frac{s-n-1}{s(s-1)}z(s)=0\\ &\Leftrightarrow \forall s>1,\ z'(s)+\left(\frac{n+1}{s}-\frac{n}{s-1}\right)z(s)=0\\ &\Leftrightarrow \forall s>1,\ e^{(n+1)\ln(s)-n\ln(s-1)}z'(s)+\left(\frac{n+1}{s}-\frac{n}{s-1}\right)e^{(n+1)\ln(s)-n\ln(s-1)}z(s)=0\\ &\Leftrightarrow \forall s>1,\ \left(\frac{s^{n+1}}{(s-1)^n}z\right)'(s)=0\\ &\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall s>1,\ z(s)=C\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall s>1,\ L[y](s)=\frac{\lambda}{s^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k s^{n-k}=\lambda\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{s^{k+1}}.$$

D'après la question 8)b) appliquée avec $a=0$, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $s>0$, $L\left[t^k\right](s)=\dfrac{k!}{s^{k+1}}$. Donc, pour $\lambda\in\mathbb{R}$ fixé, y a même transformée de Laplace que le polynôme

$$P\ :\ t\mapsto\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}t^k.$$

Réciproquement, pour tout réel t, posons $P(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}t^k$. Alors, tout tout réel t,

$$\begin{aligned}tP''(t)+(1-t)P'(t)+nP(t)&=t\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}k(k-1)t^{k-2}+(1-t)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}kt^{k-1}+n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}t^k\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}k(k-1)t^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}kt^{k-1}\\ &\quad-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}kt^k+n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}t^k\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}k^2t^{k-1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}(n-k)t^k\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\binom{n}{k+1}(k+1)^2t^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}(n-k)t^k\\ &=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}(k+1)t^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}(n-k)t^k\\ &=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)t^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}(n-k)t^k\\ &=0.\end{aligned}$$

Donc, si on pose pour tout $t\in\mathbb{R}$, $P(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}t^k$, les polynômes $t\mapsto\lambda P(t)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, sont solutions de l'équation (2) sur $\mathbb{R}$.

14. Sur $]0,+\infty[$, l'équation (2) s'écrit encore : $\forall t>0,\ y''(t)+\dfrac{1-t}{t}y'(t)+\dfrac{n}{t}y(t)=0$. Puisque les deux fonctions $a\ :\ t\mapsto\dfrac{1-t}{t}$ et $b\ :\ t\mapsto\dfrac{n}{t}$ sont continues sur $]0,+\infty[$, on sait que les solutions de l'équation (2) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. A la question précédente, on a obtenu un espace vectoriel de solutions qui est de dimension 1. On n'a donc pas obtenu toutes les solutions de l'équation (2) sur $]0,+\infty[$.

15. (a) Pour tout $t > 0$, on pose $W(t) = y(t)z'(t) - z(t)y'(t)$. La fonction W est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $t > 0$

$$\begin{aligned} W'(t) &= y(t)z''(t) + y'(t)z'(t) - y'(t)z'(t) - z(t)y''(t) = y(t)\left(\frac{t-1}{t}z'(t) - nz(t)\right) - z(t)\left(\frac{t-1}{t}y'(t) - ny(t)\right) \\ &= \frac{t-1}{t}(y(t)z'(t) - z(t)y'(t)) = \frac{t-1}{t}W(t). \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel $t > 0$, $W'(t) + \left(\frac{1}{t} - 1\right)W(t) = 0$ puis $e^{\ln(t)-t}W'(t) + \left(\frac{1}{t} - 1\right)e^{\ln(t)-t}W(t) = 0$ puis

$$\forall t > 0,\ \left(te^{-t}W\right)'(t) = 0.$$

On en déduit qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t > 0$, $te^{-t}W(t) = \mu$ puis, pour tout $t > 0$, $W(t) = \mu\frac{e^t}{t}$. De plus, d'après le résultat admis par l'énoncé, si z n'est pas colinéaire à y, alors $\mu \neq 0$ (et si z est colinéaire à y, alors $\mu = 0$).

(b) On applique ce résultat avec $y = P$ et z solution quelconque de (2) sur I. Soit I un intervalle contenu dans $]0, +\infty[$ ne contenant aucune racine de P.

$$\begin{aligned} \forall t \in I,\ P(t)z'(t) - P'(t)z(t) = \mu\frac{e^t}{t} &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \frac{z'(t)P(t) - z(t)P'(t)}{(P(t))^2} = \mu\frac{e^t}{t(P(t))^2} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ \frac{z(t)}{P(t)} = \lambda + \mu A(t) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ z(t) = \lambda P(t) + \mu P(t)A(t). \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation (2) sur I sont nécessairement de la forme $t \mapsto \lambda P(t) + \mu P(t)A(t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Réciproquement, puisque l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, ces fonctions sont toutes solutions et donc

les solutions de (2) sur I sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda P(t) + \mu P(t)A(t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

II - Problème d'algèbre

Partie I

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in E$. Puisque $f \in \mathscr{L}(E)$, on a $f(0) = 0$ puis

$$x \in K_n \Rightarrow f^n(x) = 0 \Rightarrow f\left(f^n(x)\right) = f(0) \Rightarrow f^{n+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in K_{n+1}.$$

Ceci montre que $K_n \subset K_{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1}$. Donc, la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in E$, $f^{n+1}(x) = f^n(f(x)) \in I_n$. Donc, $I_{n+1} \subset I_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$. Donc, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in K_n$. Alors, $f^n(f(x)) = f\left(f^n(x)\right) = f(0) = 0$ et donc $f(x) \in K_n$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $x \in K_n \Rightarrow f(x) \in K_n$. Donc, K_n est stable par f.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in E$, $f\left(f^n(x)\right) = f^n(f(x)) \in I_n$. Donc, I_n est stable par f.

3. I est un sous-espace vectoriel de E en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E.

Ensuite, $0 \in K_0$ et donc $0 \in K$. Soient $(x, y) \in K^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x \in K_p$ et $y \in K_q$. Soit $n = \text{Max}\{p, q\}$. Puisque $n \geqslant p$ et $n \geqslant q$, d'après la question 1)a), $x \in K_n$ et $y \in K_n$ puis $\lambda x + \mu y \in K_n$ car K_n est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda x + \mu y \in K_n$ et donc $\lambda x + \mu y \in K$.

On a montré que K est un sous-espace vectoriel de E.

4. Soit $x \in E$. D'après la question 2)b),

$$x \in I \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x \in I_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \in I_n \Rightarrow f(x) \in I.$$

Donc, I est stable par f.

Soit $x \in E$. D'après la question 2)a),

$$x \in K \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in K_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ f(x) \in K_n \Rightarrow f(x) \in K.$$

Donc, K est stable par f.

5. (a) $\mathrm{Ker}(f) = K_1 \subset K$. Donc, si $K = \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ puis f est injectif.
Inversement, si f est injectif, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est injectif en tant que composée d'endomorphismes injectifs. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \{0\}$ ce qui reste vrai si $n = 0$. On en déduit que $K = \{0\}$.

On a montré que f est injectif si et seulement si $K = \{0\}$.

(b) Si $I = E$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = E$ et en particulier, $\mathrm{Im}(f) = E$ puis f est surjectif.
Inversement, si f est surjectif, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est surjectif en tant que composée d'endomorphismes surjectifs. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = E$ ce qui reste vrai si $n = 0$. On en déduit que $I = E$.

On a montré que f est surjectif si et seulement si $I = E$.

6. (a) Soit f une projection. On a $f^2 = f$ puis, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = f$. On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $K_p = K_1$ et $I_p = I_1$. En tenant compte de $K_0 = \{0\}$ et $I_0 = E$, on a donc

$$K = K_1 = \mathrm{Ker}(f) \text{ et } I = I_1 = \mathrm{Im}(f).$$

En particulier, $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = I \oplus K$.

Ensuite, pour tout x de $K = \mathrm{Ker}(f)$, $f(x) = 0$ ou encore $f_{|K} = 0$. Ainsi, $f_{|K}$ est nilpotent d'indice 1.

Enfin, pour tout x de $I = \mathrm{Im}(f)$, $f(x) = x$ ou encore $f_{|I} = Id_I$. En particulier, $f_{|I}$ est un automorphisme de I.

(b) Pour tout $P \in E$, $f^{d+1}(P) = P^{(d+1)} = 0$. Donc, $K_{d+1} = E$ et $I_{d+1} = \{0\}$. On en déduit que $K = E$ et $I = \{0\}$.

Ensuite, $f_{|K}^{d+1} = 0$ et donc $f_{|K}$ est nilpotent. D'autre part, $f_{|I}$ est l'application nulle de $\{0\}$ dans lui-même. En particulier, $f_{|I}$ est un automorphisme.

7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in K_n \Leftrightarrow P^{(n)} = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En tenant compte de $K_0 = \{0\}$, on en déduit que

$$K = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X].$$

D'autre part, f est surjective car pour $Q \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme $P\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x Q(t)\ dt$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = Q$.
Puisque f est surjective, $I = E$ d'après la question 5)b)

Puisque $I = K = E$, la somme $I + K$ n'est pas directe.

Partie II

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n = K_{n+1}$. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $K_{n+p} = K_n$.

- L'affirmation est vraie quand $p = 1$.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $K_{n+p} = K_n$. D'après la question 1)a), on sait déjà que $K_n = K_{n+p} \subset K_{n+p+1}$. Inversement, pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in K_{n+p+1} &\Rightarrow f^{n+p+1}(x) = 0 \Rightarrow f^{n+p}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in K_{n+p} \\ &\Rightarrow f(x) \in K_n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &\Rightarrow f^n(f(x)) = 0 \Rightarrow f^{n+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in K_{n+1} = K_n. \end{aligned}$$

  Donc, $K_{n+p+1} \subset K_n$ puis $K_{n+p+1} = K_n$.

Le résultat est démontré par récurrence.

9. Posons $d = \dim(E) \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \neq K_{n+1}$ ou encore, plus précisément, $K_n \underset{\neq}{\subset} K_{n+1}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(K_n) < \dim(K_{n+1})$ ou encore, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(K_{n+1}) \geqslant \dim(K_n) + 1$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(K_n) \geqslant n$. En particulier, $\dim(K_{d+1}) \geqslant d + 1 > d = \dim(E)$ ce qui est impossible.

Donc, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n = K_{n+1}$. Ainsi, $\{n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} = K_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. A ce titre, $\{n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} = K_n\}$ admet un plus petit élément. On peut donc poser $m = \text{Min}\{n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} = K_n\} \in \mathbb{N}$.

Par définition de m, $K_m = K_{m+1}$. D'après la question 9), pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_{m+p} = K_m$ puis $\displaystyle\bigcup_{n \geqslant m} K_n = K_m$. D'autre part, $K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_m$ et donc $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{m} K_n = K_m$. Finalement,

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = K_m.$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K = K_{m+p}$.

10. Soient n et p deux entiers naturels. On sait déjà que $K_n \subset K_{n+p}$ et $I_{n+p} \subset I_n$. Puisque E est de dimension finie,

$$\begin{aligned} K_{n+p} = K_n &\Leftrightarrow \dim(K_{n+p}) = \dim(K_n) \Leftrightarrow \dim(E) - (I_{n+p}) = \dim(E) - \dim(I_n) \text{ (d'après le théorème du rang)} \\ &\Leftrightarrow \dim(I_{n+p}) = \dim(I_n) \Leftrightarrow I_{n+p} = I_n. \end{aligned}$$

11. D'après les deux questions précédentes, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{m+p} = I_m$. Donc, comme à la question 9), $I = I_m$.

12. Ainsi, $K = K_m$. Par définition de K_m, pour tout $x \in K_m$, $f^m(x) = 0$. Si $m = 0$, $K = K_0 = \{0\}$ puis $f_{|K}$ est l'application nulle. Dans ce cas, $f_{|K}^1 = 0$ puis $f_{|K}$ est nilpotent. Sinon, $m \geqslant 1$ puis $f_{|K}^m = 0$ et donc, encore une fois $f_{|K}$ est nilpotent.

13. f laisse stable I d'après la question 4) et donc $f_{|I}$ est un endomorphisme de I.
Soit $y \in I = I_{m+1}$. Il existe $z \in E$ tel que $y = f^{m+1}(z) = f(f^m(z))$. Soit $x = f^m(z) \in I_m = I$. x est un élément de I_m tel que $y = f(x)$.
Ainsi, pour tout y de I, il existe $x \in I$ tel que $y = f_{|I}(x)$. Ceci montre que $f_{|I}$ est un endomorphisme surjectif de I. Puisque I est de dimension finie (car E l'est), on sait alors que $f_{|I}$ est un automorphisme de I.

14. Soit $x \in E$. Alors, $f^m(x) \in I_m = I$. Puisque $f_{|I}$ est surjectif, il existe $z \in I_m$ tel que $f^m(x) = f^m(z)$. Soit $y \in E$ tel que $z = f^m(y)$. y est un élément de E tel que $f^m(x) = f^{2m}(y)$.

15. On sait déjà que $K = K_m$ et $I = I_m$. D'après le théorème du rang, $\dim(K) + \dim(I) = \dim(E)$.

Soit $x \in K \cap I = K_m \cap I_m$. Donc, $f^m(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^m(y)$. Mais alors, $f^{2m}(y) = f^m(x) = 0$. On en déduit que $y \in K_{2m} = K_m$ (car $2m \geqslant m$) puis que $x = f^m(y) = 0$. Ceci montre que $K \cap I = \{0\}$.

En résumé, $K \cap I = \{0\}$ et $\dim(K) + \dim(I) = \dim(E) < +\infty$. On en déduit que $E = I \oplus K$.

16. Soit $m = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* / f_{|G}^n = 0\right\} \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de $f_{|G}$. Soit $x \in E$. Il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Alors, pour tout $n \geqslant m$, $f^n(x) = f^n(y) + f^n(z) = f^n(y)$. Puisque $f_{|F}$ est injectif, pour tout $n \geqslant m$,

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f^n(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x \in G.$$

Ceci montre pour tout $n \geqslant m$, $G = K_n$ et en particulier $G = K_m$. D'autre part, puisque $f_{|F}$ est un automorphisme de F, il en est de même de $f_{|I}^m$. Donc, pour $y \in F$, il existe $y' \in F$ tel que $y = f^m(y')$. Ceci montre que $F \subset I_m$. De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim(F) = \dim(E) - \dim(G) = \dim(E) - \dim(K_m) = \dim(I_m) < +\infty.$$

Donc, $F = I_m$.

Il reste à vérifier que $K = K_m$ et $I = I_m$. D'après la question 10), il suffit de vérifier que $K = K_m$. On sait déjà que pour tout $n \geqslant m$, $K_n = K_m$. Vérifions que $K_{m-1} \neq K_m$. Par définition de m, $f_{|G}^{m-1} \neq 0$ et donc il existe $x \in G$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$. Puisque $f^m(x) = 0$ car $x \in G$, x est un élément de K_m qui n'est pas dans K_{m-1}. Ainsi,

$$K_0 \underset{\neq}{\subset} K_1 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} K_m = K_{m+1} = K_{m+2} = \ldots.$$

Ceci montre que $G = K_m = K$ et donc aussi que $F = I_m = I$.

