

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, \ln désigne le logarithme népérien, e le nombre de Néper, R l'ensemble des nombres réels, C l'ensemble des nombres complexes et N l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application f définie sur R par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Le graphe de f admet-il un centre de symétrie ?
3. Calculer $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 f(x) dx$.
4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in N}$ définie par :
 $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice n° 2

On considère l'application f définie sur R par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$, où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations et la convexité de f .
2. Montrer que f admet un centre de symétrie (que l'on précisera).
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = x$.
4. Calculer $I(a) = \int_0^1 f(x) dx$

Exercice n° 3

Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow R$ définie par : $f(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$.

Soit $F:]0, +\infty[\rightarrow R$ définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$

1. Etudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de f et celui de F sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
4. La fonction dérivée F' est-elle continue ?
5. Etudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.

Exercice n° 4

1. Dans une tombola de 100 billets, deux sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ d'obtenir au moins un billet gagnant ?
2. Dans une autre tombola composée également de 100 billets, sachant que le prix d'un billet est de 1 euro et qu'un billet gagnant rapporte 20 euros, combien faut-il de billets gagnants dans cette loterie pour que l'espérance de gain des joueurs soit la plus proche de zéro.
3. Dans une troisième tombola contenant 1000 billets, il y a 3 billets gagnants qui rapportent chacun 50 euros et 20 autres billets gagnants qui rapportent chacun 20 euros. Les autres billets sont perdants.
Sachant que le prix d'achat d'un billet est toujours d'un euro, calculer l'espérance de gain pour cette tombola.

Exercice n° 5

Les trois questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans R l'équation : $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$.
2. Résoudre dans R^2 , le système :
$$\begin{cases} x + y + 1 = -4 \\ (x + 2)(y - 1) = -45 \end{cases}$$
3. Résoudre dans R l'inéquation : $(m - 3)x^2 - 2mx + 12 \geq 0$, où m est un paramètre réel.

Exercice n° 6

Déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)f(t) dt$$