ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE PIERRE NDIAYE
ENSAE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est <u>obligatoire</u> et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x\sin x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$.

3. Donner le comportement au voisinage de $x = 1$ de la même fonction.

4. Écrire le nombre complexe $z = 2 - 2i$ sous forme trigonométrique.

5. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \tan(x/2)\cos(2x),$$

   expliquez quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

6. Dériver la fonction définie à la question précédente.

7. Dans un jeu opposant les joueurs A et B, on lance un dé équilibré. Si le dé tombe sur 5 ou 6, B réalise un score égal au résultat du lancer. Si le dé tombe sur 1, 2, 3 ou 4, A réalise un score égal à k fois le résultat du lancer. Quelle doit être la valeur de k pour que le score soit équitable, c'est-à-dire pour que la différence entre les scores soit d'espérance nulle ?

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0^2 + \cdots + u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

9. On considère la suite définie par $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1/4$ pour $n \geq 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

10. Résoudre l'equation $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2 Dans cet exercice, on se donne un nombre réel a, et on considère l'application

$$f_a(x) = \exp(x^a \ln x)$$

1. Donner le domaine de définition de f_a, et calculer sa dérivée.
2. Montrer que toutes les courbes représentatives de f_a, $a \in \mathbf{R}$, ont un point commun, que l'on déterminera.
3. Étudier la branche infinie de f_a en $+\infty$ selon les valeurs de a.
4. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f_a à droite de 0.
5. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f'_a à droite de 0.
6. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
7. Dresser les tableaux de variations de f_a correspondant à tous les cas que vous avez distingués aux questions précédentes. On précisera notamment les valeurs des maximums et minimums locaux de f_a.
8. Représenter graphiquement sur une même figure les courbes représentatives correspondant à ces tableaux de variations. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.
9. Calculer $f_{-0,1}(10^{10})$ et commenter le résultat obtenu au vu des résultats précédents.

Exercice 3

1. On considère l'application f qui à tout nombre réel x associe $f(x) = x^3 - 2x - 1/2$.
   (a) Calculer $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.
   (c) Déduire de ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport à -1, $-1/2$, 0 et 1.
   (d) Tracer la courbe représentative de f.
2. On considère désormais la fonction de la variable réelle

$$g : x \mapsto \frac{\tan x}{1 + 2\cos x}.$$

   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Étudier la parité et la périodicité de g ; en déduire l'intervalle sur lequel vous allez étudier cette fonction.

(c) Étudier les branches infinies de g.
(d) Calculer la dérivée de g, et exprimer $g'(x)$ en fonction de $\cos x$.
(e) En vous aidant des résultats de la question 1, montrer que g' s'annule une unique fois sur l'intervalle d'étude, en un point x_0 situé entre $\pi/2$ et $2\pi/3$.
(f) Dresser le tableau de variations de g.
(g) Donner l'allure de la courbe représentative de g.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout n,
$$I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx.$$
4. Conclure quant à la convergence de I_n.
5. Montrer que
$$\ln 2 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx.$$
6. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx = 0$$
et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1. (a) Montrer que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
   (b) En déduire que
   $$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\frac{\sqrt{2n-2}}{n}}$$
   et donner la limite de $u_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.
2. (a) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n}.$$
   (b) Montrer que
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$
   (c) Déduire des questions précédentes la valeur de
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}}.$$

3. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$

On considère l'ensemble **U** des nombres complexes de module égal à 1. Soit a un nombre complexe a tel que $|a| \neq 1$.

1. Montrer que l'application f_a donnée par
$$f_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$
est bien définie pour tout élément z de **U**.
2. Montrer que, si $z \in \mathbf{U}$, alors $\bar{z} = 1/z$.
3. En déduire que si $z \in \mathbf{U}$, alors $f_a(z) \in \mathbf{U}$.
4. Réciproquement, montrer que tout élément t de **U** est l'image par f_a d'un unique élément z de **U** que l'on déterminera.
5. Déduire de ce qui précède que f_a est une bijection de **U** sur **U** et préciser sa bijection réciproque.
6. Donner l'ensemble des points z dont l'image par f_a appartient à l'ensemble $\{-1, 1, i, -i\}$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $a = 2$;
   (b) $a = 2i$;
   (c) $a = 1 + i$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$

On joue suivant la règle suivante : on est en possession d'un pion initialement placé au point 0 sur une règle graduée ; à chaque lancer du dé, on avance de 3 cases si le résultat est un multiple de 3, et on recule de 2 cases dans le cas contraire. Le joueur ou la joueuse gagne si, au bout de 5 lancers, le pion est sur une case positive ou nulle.

1. Soit X_k la variable aléatoire égale à 3 si le résultat du $k-$ième lancer est un multiple de 3, et à -2 sinon. Donner la loi de X_k.
2. Pour tout entier k, on pose $Y_k = (X_k + 2)/5$. Donner la loi de Y_k ainsi que la loi de la variable
$$S = \sum_{k=0}^{5} Y_k.$$
3. En déduire la probabilité de gagner à ce jeu.
4. Pouvez-vous étendre votre raisonnement :
   (a) au cas où on avance de 3 cases si le résultat est 6, et on recule de 2 cases dans le cas contraire ?
   (b) au cas où on gagne si le pion est sur une case positive après 10 lancers ?
   Donner la probabilité de gain dans chacune de ces situations.