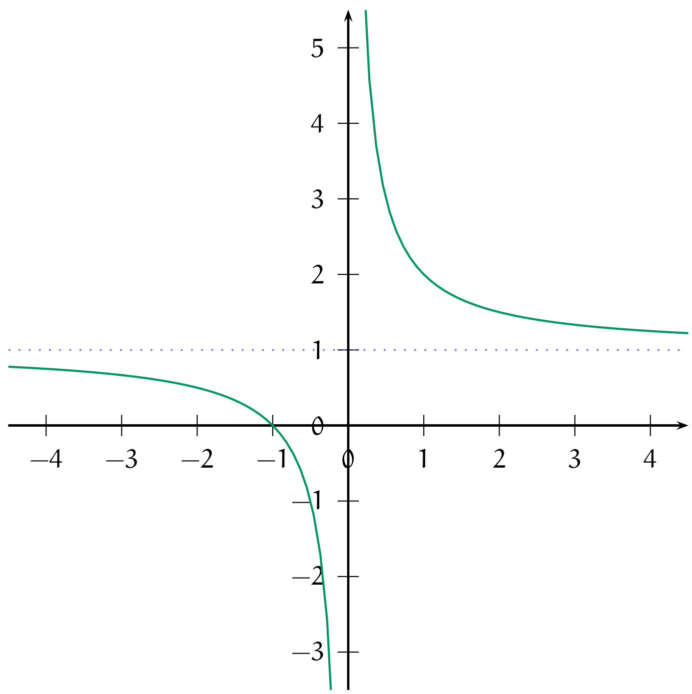
SESSION 2023

CAPESA
Analystes statisticiens

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Le graphe de la fonction f admet la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote et la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote en $-\infty$ et $+\infty$.



2. Pour tout réel non nul x, $\dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x} + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$. Donc le point $\Omega(0, 1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

3. Soit $\varepsilon > 0$. $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,dx = 1 - \varepsilon - \ln(\varepsilon)$ puis $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx = +\infty$.

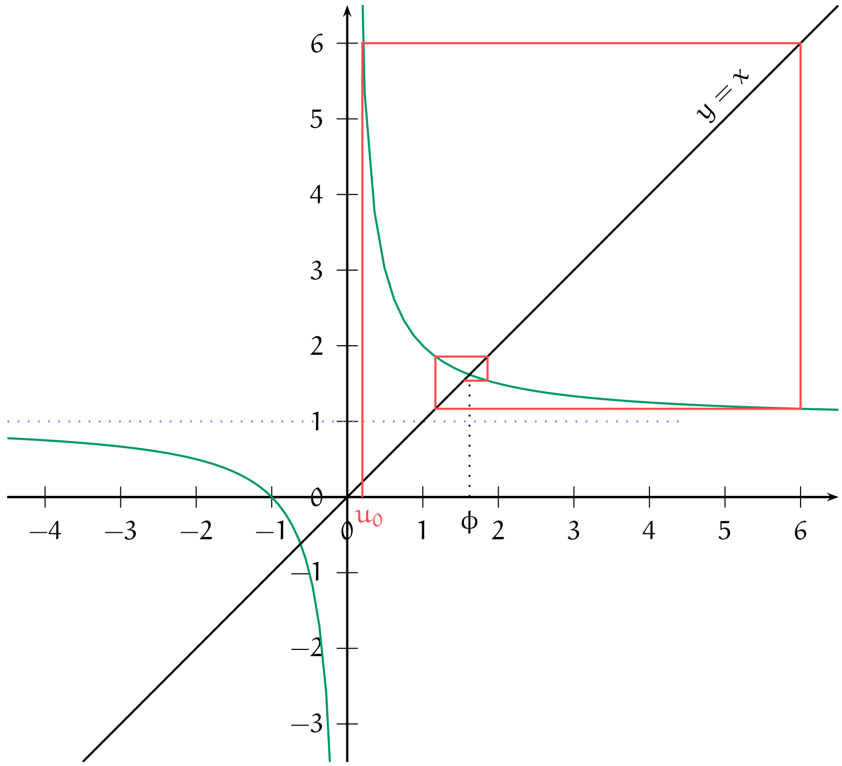
4. Voir la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la page suivante.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

• Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ, alors $\ell \geqslant 0$. On ne peut avoir $\ell = 0$ car alors $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ ce qui est une contradiction. Donc, $\ell > 0$. Mais alors, par continuité de la fonction f sur $]0, +\infty[$ et en particulier en ℓ, ℓ est un point fixe de f :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

Or, pour $\ell \geqslant 0$, $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = \phi$ avec $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}} \geqslant 1$ puis

$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\phi}\right| = \frac{|u_n - \phi|}{u_n \phi} \leqslant \frac{1}{\phi}\,|u_n - \ell|\,.$$

On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \phi| \leqslant \dfrac{1}{\phi^{n-1}}\,|u_1 - \phi|$. Puisque $\phi > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\phi^{n-1}}\,|u_1 - \phi| = 0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \phi.$$

Exercice 2

1. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{-ae^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2} = \dfrac{ae^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2}$ puis

$$\begin{aligned}
f''(x) &= a\frac{-ae^{-ax}\left(1+e^{-ax}\right)^2 - e^{-ax} \times 2\left(-ae^{-ax}\right)\left(1+e^{-ax}\right)}{\left(1+e^{-ax}\right)^4} \\
&= a\frac{-ae^{-ax}\left(1+e^{-ax}\right) + 2ae^{-2ax}}{\left(1+e^{-ax}\right)^3} = a\frac{-ae^{-ax} + ae^{-2ax}}{\left(1+e^{-ax}\right)^3} \\
&= \frac{a^2e^{-2ax}\left(1-e^{ax}\right)}{\left(1+e^{-ax}\right)^3}.
\end{aligned}$$

Puisque $a > 0$, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ puis la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe de $1 - e^{ax}$ et donc pour tout réel x, $f''(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $f''(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant 0$. La fonction f est convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{e^{ax}}} = \dfrac{e^{ax}}{1+e^{ax}}$ et donc

$$\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}+\frac{1}{1+e^{ax}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ceci montre que le point $\Omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

3. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=f(x)-x$. La fonction g et continue sur $\mathbb{R}$, $g(0)=\dfrac{1}{2}>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ ou encore l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction g est strictement positive sur $]-\infty,0]$ et en particulier ne s'annule pas sur $]-\infty,0]$. L'équation $f(x)=x$ n'admet donc pas de solution sur $]-\infty,0]$.

Ensuite, sur $]0,+\infty[$, l'équation $f(x)=x$ s'écrit encore $x+xe^{-ax}-1=0$. Pour $x>0$, on pose $h(x)=x+xe^{-ax}-1$. Pour tout $x>0$, $h'(x)=1+e^{-ax}-axe^{-ax}=e^{-ax}\left(e^{ax}-ax+1\right)$. Pour $x\geqslant 0$, $h'(x)$ est du signe de $k(x)=e^{ax}-ax-1$. Pour tout réel $x>0$, $k'(x)=a\left(e^{ax}-1\right)>0$. La fonction k est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$ puis, pour $x>0$, $k(x)>k(0)=0$. La fonction h' est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$ puis la fonction h est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. En particulier, la fonction h s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$ ou encore l'équation $f(x)=x$ admet au plus une solution sur $]0,+\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x)=x$ admet exactement une solution sur $]0,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

4. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\,dx=\left[\frac{1}{a}\ln\left(1+e^{ax}\right)\right]_0^1=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1+e^{a}}{2}\right).$

Exercice 3

1. La fonction f est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. De plus,

$$\lim_{t\to1,\ t\neq1}f(t)=\lim_{t\to1}\frac{\ln(t)}{t-1}=1.$$

Donc, la fonction f est continue en 1 et finalement, la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $x\in]0,+\infty[$. Si $x\geqslant1$ alors $1\leqslant x\leqslant x^2$. Puisque $\left[x,x^2\right]\subset]0,+\infty[$, la fonction f est continue sur $\left[x,x^2\right]$ puis $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}f(t)\,dt$ existe. Si $x<1$ alors $x^2\leqslant x$. Puisque $\left[x^2,x\right]\subset]0,+\infty[$, la fonction f est continue sur $\left[x^2,x\right]$ puis $F(x)=-\displaystyle\int_{x^2}^{x}f(t)\,dt$ existe.
Ainsi, la fonction F est bien définie sur $]0,+\infty[$

2. Soit $t\in]0,+\infty[$. Si $t<1$, $\ln(t)<0$ et $t-1<0$ puis $f(t)=\dfrac{\ln(t)}{t-1}>0$. Si $t>1$, $\ln(t)>0$ et $t-1>0$ puis $f(t)=\dfrac{\ln(t)}{t-1}>0$. Enfin, $f(1)=1>0$. En résumé, pour tout réel $t\in]0,+\infty[$, $f(t)>0$.

Soit $x\in]0,+\infty[$. Si $x>1$, pour tout $t\in\left[x,x^2\right]$, $f(t)\geqslant0$ puis, par positivité de l'intégration, $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}f(t)\,dt\geqslant0$. Si $0<x<1$, pour tout $t\in\left[x^2,x\right]$, $f(t)\geqslant0$ puis, par positivité de l'intégration, $\displaystyle\int_{x^2}^{x}f(t)\,dt\geqslant0$ et donc $F(x)=-\displaystyle\int_{x^2}^{x}f(t)\,dt\leqslant0$.
Enfin, $F(1)=0$.

La fonction F est donc négative sur $]0,1[$ et positive sur $[1,+\infty[$.

3. Soit Φ une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $F(x)=\Phi\left(x^2\right)-\Phi(x)$. La fonction $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction Φ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction $x\mapsto\Phi\left(x^2\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}F'(x)&=2x\Phi'\left(x^2\right)-\Phi'(x)=2xf\left(x^2\right)-f(x)=2x\times\frac{\ln\left(x^2\right)}{x^2-1}-\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{4x\ln(x)}{x^2-1}-\frac{\ln(x)}{x-1}\\&=\frac{(4x-(x+1))\ln(x)}{x^2-1}=\frac{(3x-1)\ln(x)}{x^2-1}.\end{aligned}$$

De même, $F'(1) = 2 \times 1 \times f\left(1^2\right) - f(1) = f(1) = 1$. En résumé, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = \begin{cases} \dfrac{(3x-1)\ln(x)}{x^2-1} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$.

4. Pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = 2xf\left(x^2\right) - f(x)$. Puisque la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$, la fonction F' est continue sur $]0, +\infty[$.

5. $F'(1) = 1 > 0$. D'autre pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $F'(x) = \dfrac{(3x-1)\ln(x)}{x^2-1} = (3x-1) \times \dfrac{1}{x+1} \times \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. Pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\dfrac{\ln(x)}{x-1} > 0$ et $\dfrac{1}{x+1} > 0$. Donc, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $F'(x)$ est du signe de $3x - 1$. On en déduit que la fonction F' est négative sur $\left]0, \dfrac{1}{3}\right]$ puis positive sur $\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

Ainsi, la fonction F est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{3}\right]$ puis croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

Exercice 4

1. Soit n le nombre de billets achetés où $n \in [\![1, 100]\!]$. Le nombre de choix de n billets parmi 100 est $\dbinom{100}{n}$ et le nombre de choix de n billets parmi les 98 billets perdants est $\dbinom{98}{n}$. La probabilité d'obtenir deux billets perdants est $\dfrac{\binom{98}{n}}{\binom{100}{n}}$ puis la probabilité p_n d'obtenir au moins un billet gagnant (événement contraire) est

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - \frac{\binom{98}{n}}{\binom{100}{n}} = 1 - \frac{\dfrac{98 \times 97 \times \ldots \times (98-(n-1))}{n!}}{\dfrac{100 \times 99 \times \ldots \times (100-(n-1))}{n!}} = 1 - \frac{(98-(n-2))(98-(n-1))}{100 \times 99} \\ &= 1 - \frac{(100-n)(99-n)}{100 \times 99} = \frac{199n - n^2}{9900}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{199n - n^2}{9900} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 199n - n^2 \geqslant 4950 \Leftrightarrow n^2 - 199n + 4950 \leqslant 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 199x + 4950$ est $\Delta = 199^2 - 4 \times 4950 = 19801$. Le trinôme $x^2 - 199x + 4950$ admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1 = \dfrac{199 - \sqrt{19\,801}}{2} = 29,1\ldots$ et $x_2 = \dfrac{199 + \sqrt{19\,801}}{2} = 169,8\ldots$

Donc, $n^2 - 199n + 4950 \leqslant 0 \Leftrightarrow 29,1\ldots \leqslant n \leqslant 169,8\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 29$ (car n est entier et $n \leqslant 100$). A partir de 29 billets achetés, on a plus d'une chance sur deux d'avoir au moins un billet gagnant.

2. Soit n le nombre de billets gagnants. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur après l'achat d'un billet. Les valeurs prises par X sont -1 et 19. $\mathbb{P}(X = 19) = \dfrac{n}{100}$ et $\mathbb{P}(X = -1) = \dfrac{100-n}{100}$ puis

$$\mathbb{E}(X) = 19 \times \frac{n}{100} + (-1) \times \frac{100-n}{100} = \frac{19n - 100 + n}{100} = 0,2n - 1.$$

L'espérance de gain est nulle pour $n = 5$.

3. Avec les notations de la question précédente, X prend les valeurs 49, 19 et -1 puis

$$\mathbb{E}(X) = (-1)\frac{977}{1000} + 19 \times \frac{20}{1000} + 49 \times \frac{3}{1000} = \frac{-977 + 380 + 147}{1000} = -\frac{450}{1000} = -0,45.$$

Exercice 5

1. Soit x une éventuelle solution de l'équation proposée. On a nécessairement $x > 1$. Pour $x > 1$,

$$\ln\left(x^2-1\right)-\ln(2x-1)+\ln(2)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2\left(x^2-1\right)}{2x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-1\right)}{2x-1}=1$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-1\right)=2x-1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ (car } x>1\text{)}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+1=-4 \\ (x+2)(y-1)=-45 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x-5 \\ (x+2)(-x-6)=-45 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x-5 \\ x^2+8x-33=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \text{ ou } x=-11 \\ y=-x-5 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x,y)=(3,-8) \text{ ou } (x,y)=(-11,6).$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(3,-8),(-11,6)\}$.

3. On note (I_m) l'inéquation à résoudre puis $\mathscr{S}_m$ l'ensemble des solutions de (E_m) dans $\mathbb{R}$.

Si $m=3$, l'inéquation s'écrit $-6x+12\geqslant 0$ ce qui équivaut à $x\leqslant 2$. Donc, $\mathscr{S}_3=]-\infty,2]$.

Dorénavant $m\neq 3$. Le discriminant réduit du trinôme $(m-3)x^2-2mx+12$ est

$$\Delta'=(-m)^2-12(m-3)=m^2-12m+36=(m-6)^2.$$

Si $m=6$, $\Delta=0$ puis pour tout réel x, $(m-3)x^2-2mx+12=3x^2-12x+12=3(x-2)^2\geqslant 0$. On en déduit que $\mathscr{S}_6=\mathbb{R}$.

Si $m\notin\{3,6\}$, le trinôme $(m-3)x^2-2mx+12$ admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1=\dfrac{m-(m-6)}{m-3}=\dfrac{6}{m-3}$ et $x_2=\dfrac{m+(m-6)}{m-3}=2$. Dans tous les cas, le trinôme est du signe de $-(m-3)$ entre ses racines et donc strictement positif entre x_1 et x_2 si $m<3$ et strictement négatif entre x_1 et x_2 si $m>3$.

On note enfin que $x_2-x_1=2-\dfrac{6}{m-3}=\dfrac{2(m-6)}{m-3}$. Par suite, si $m\in]-\infty,3[\cup]6,+\infty[$, $x_1<x_2$ et si $m\in]3,6[$, $x_2<x_1$.

Finalement,

- si $m=3$, $\mathscr{S}_m=]-\infty,2]$,
- si $m=6$, $\mathscr{S}_m=\mathbb{R}$,
- si $m<3$, $\mathscr{S}_m=\left[\dfrac{6}{m-3},2\right]$,
- si $3<m<6$, $\mathscr{S}_m=]-\infty,2]\cup\left[\dfrac{6}{m-3},+\infty\right[$,
- si $m>6$, $\mathscr{S}_m=\left]-\infty,\dfrac{6}{m-3}\right]\cup[2,+\infty[$,

Exercice 6

Soit f une éventuelle solution du problème. Alors, pour tout réel x, $f(x)=-1-x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf(t)\,dt$. Déjà, on a nécessairement $f(0)=-1$.

Ensuite, les fonctions $t\mapsto f(t)$ et $t\mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc les fonctions $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ et $x\mapsto\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction f et en dérivant, on obtient pour tout réel x,

$$f'(x)=-\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)+xf(x)=-\int_0^x f(t)\,dt.$$

Mais alors, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En redérivant, on obtient $f''+f=0$. Par suite, il existe nécessairement $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel x, $f(x)=\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$. L'égalité $f(0)=-1$ fournit $\lambda=-1$.

Réciproquement, pour tout réel x, posons $f(x)=-\cos(x)+\mu\sin(x)$ où $\mu\in\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
-1-\int_0^x (x-t)f(t)\ dt &= -1+\int_0^x (t-x)(-\cos(t)+\mu\sin(t))\ dt \\
&= -1+\left[(t-x)(-\sin(t)-\mu\cos(t))\right]_0^x-\int_0^x(-\sin(t)-\mu\cos(t))\ dt \\
&= -1-\mu x-\left[(\cos(t)-\mu\sin(t))\right]_0^x = -1-\mu x-\cos(x)+\mu\sin(x)+1 \\
&= f(x)-\mu x
\end{aligned}$$

Par suite, la fonction f est solution si et seulement si $\mu=0$. L'équation fonctionnelle de l'énoncé admet une solution et une seule, la fonction $f\ :\ x\mapsto-\cos(x)$.

