SESSION 2023

CAPESA

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. Puisque $x + x^2 \underset{x \to 0}{\to} 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1 + (x + x^2)} \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 - \left(x + x^2\right) + \left(x + x^2\right)^2 - \left(x + x^2\right)^3 + (x)^4 + o\left(x^4\right) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + (-1+1)x^2 + (2-1)x^3 + (1-3+1)x^4 + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^3 - x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}
$$

2. Pour tout réel x, $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Donc, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Mais alors, la fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ en que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout réel x,

$$
f'(x) = -\frac{2x + 1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-(2)\left(x^2 + x + 1\right)^2 + (2x+1) \times 2(2x+1)\left(x^2 + x + 1\right)}{\left(x^2 + x + 1\right)^4} = \frac{-(2)\left(x^2 + x + 1\right) + 2(2x+1)^2}{\left(x^2 + x + 1\right)^3} \\
&= \frac{6x^2 + 6x}{\left(x^2 + x + 1\right)^3} = \frac{6x(x+1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^3}.
\end{aligned}
$$

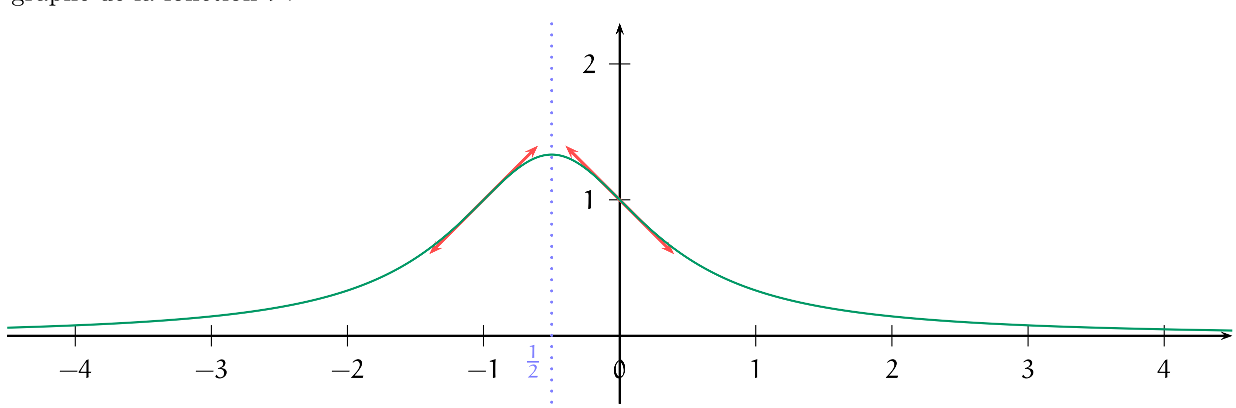
La fonction f' est strictement positive sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, strictement négative sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et s'annule en $-\frac{1}{2}$. La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Ensuite, pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe de $x(x+1)$ et donc, la fonction f'' est positive sur $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ et négative sur $[0, 1]$. On en déduit que la fonction f est convexe sur $]-\infty, -1]$ et sur $[0, +\infty[$ et concave sur $[0, 1]$. Enfin, la fonction f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 0. La courbe représentative de f admet donc deux points d'inflexion, les points de coordonnées respectives $(0, 1)$ et $(-1, 1)$.

3. Pour tout réel x,

$$
f\left(2\left(-\frac{1}{2}\right) - x\right) = f(-1 - x) = \frac{1}{1 + (-1 - x) + (-1 - x)^2} = \frac{1}{1 + x + x^2} = f(x).
$$

Donc, la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.
Voici le graphe de la fonction f :



La courbe représentative de f n'admet pas de centre de symétrie.

4.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\ dx = \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2-5x+6\right)=0 &\Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } x^2-5x+6=1 \Leftrightarrow x^2-5x+6=1 \Leftrightarrow x^2-5x+5=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2-5x+6>0$ ce qui équivaut à $(x-2)(x-3)>0$ ou encore à $x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

Le domaine de définition de la fonction f est $D =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur D et pour $x \in D$, $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$. Pour tout x de D, $f'(x)$ est du signe de $2x-5$ et donc, la fonction f' est strictement négative sur $]-\infty, 2[$ ($\subset \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$) et strictement positive sur $]3, +\infty[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 2[$ et strictement croissante sur $]3, +\infty[$.

On note que pour $x \in D$, $2 \times \frac{5}{2} - x \in D$ puis

$$f\left(2\times\frac{5}{2}-x\right) = \ln\left((5-x)^2-5(5-x)+6\right) = \ln\left(x^2-5x+6\right) = f(x).$$

Dans la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

Enfin, $\lim\limits_{x\to3,\ x>3} f(x) = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. La courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 3$ pour asymptote (et aussi la droite d'équation $x = 2$ par symétrie). D'autre part, la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox) (et de même en $-\infty$).

Voir graphique page suivante.

3. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^1 \ln\left(x^2-5x+6\right)\ dx = \left[x\ln\left(x^2-5x+6\right)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\ dx = \ln(2) - \int_0^1 \frac{2x^2-5x}{x^2-5x+6}\ dx$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle s'écrit

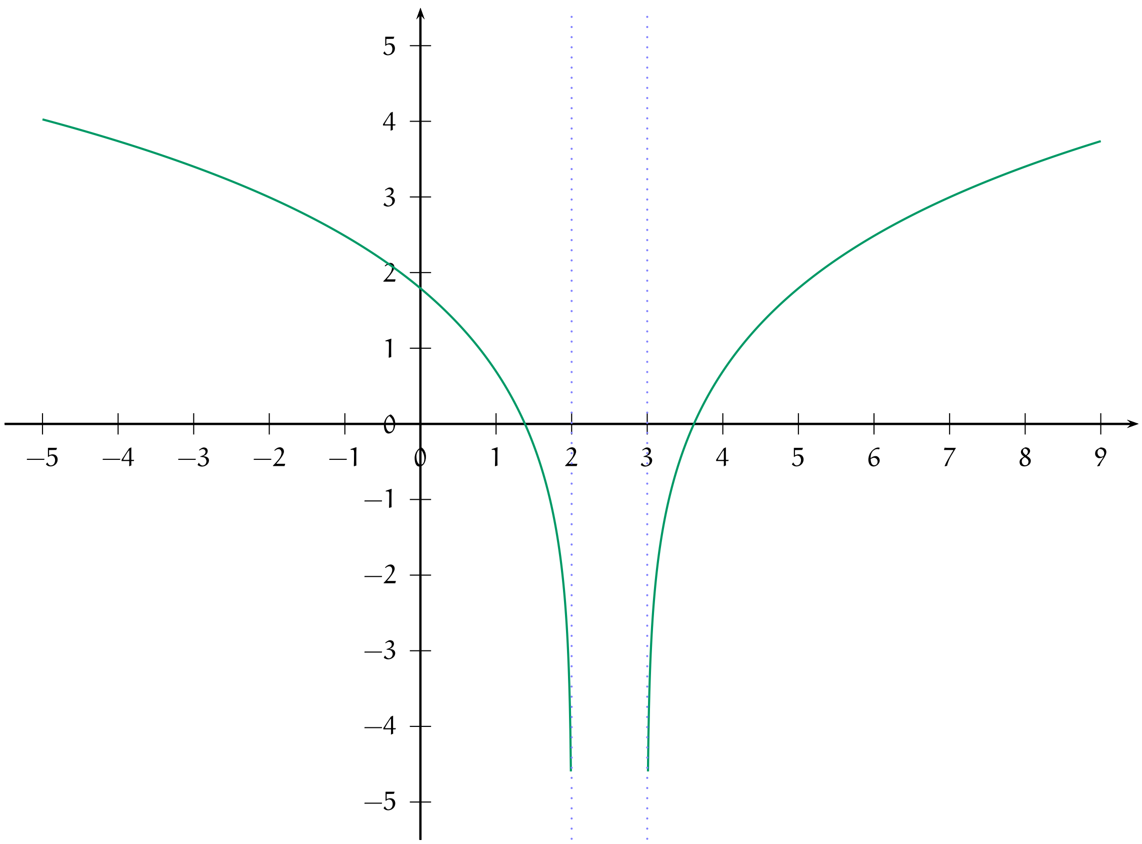
$$R = \frac{2X^2 - 5X}{(X-2)(X-3)} = 2 + \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-3}.$$

avec $a = \lim_{x \to 2}(x-2)R(x) = \dfrac{2 \times 2^2 - 5 \times 2}{2-3} = 2$ et $b = \lim_{x \to 3}(x-3)R(x) = \dfrac{2 \times 3^2 - 5 \times 3}{3-2} = 3$. Donc,

$$\frac{2X^2 - 5X}{X^2 - 5X + 6} = 2 + \frac{2}{X-2} + \frac{3}{X-3}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)\ dx &= \ln(2) - \int_0^1 \left(2 + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}\right) dx = \ln(2) - 2 - \left[2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|\right]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2 - 3\ln(2) + 2\ln(2) + 3\ln(3) = 3\ln(3) - 2\end{aligned}$$



Exercice 3

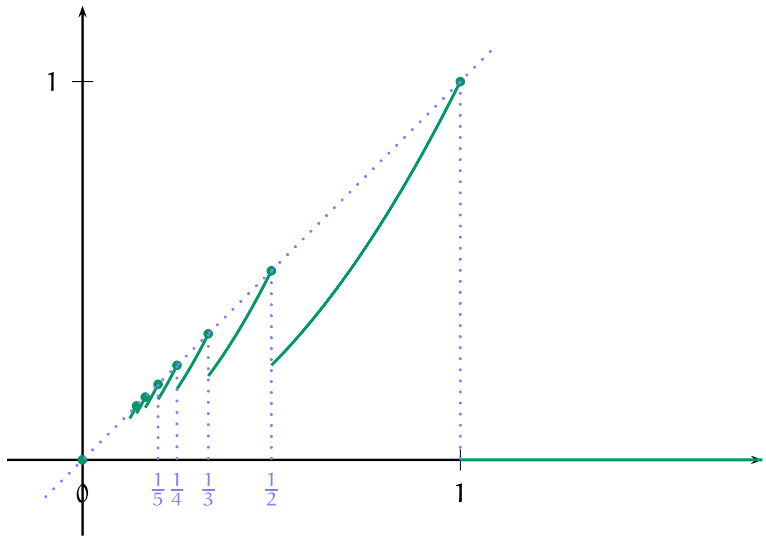
1. La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$. Ensuite, $f(0) = 0$ puis, pour $x > 1$, $0 < \dfrac{1}{x} < 1$ puis $f(x) = 0$.

Soit $x \in]0, 1[$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{p+1} < x \leqslant \dfrac{1}{p}$. Alors, $p \leqslant \dfrac{1}{x} < p + 1$ puis $E\left(\dfrac{1}{x}\right) = p$ puis $f(x) = px^2$. En résumé,

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ px^2 \text{ si il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \dfrac{1}{p+1} < x \leqslant \dfrac{1}{p} \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}.$$

Voir le graphe de la fonction f page suivante.

La fonction f est continue sur $\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left]\dfrac{1}{p+1}, \dfrac{1}{p}\right[\right) \cup]1, +\infty[$ et continue à gauche en chaque nombre de la forme $\dfrac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$.



Etudions la continuité en 0 (à droite). Pour tout $x > 0$, $0 \leqslant f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2 \times \frac{1}{x} = x$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc la fonction f est continue en 0 (à droite).

Etudions la continuité en 1 (à droite). $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1,\ x>1} f(x) = 0 \neq f(1)$. Donc, la fonction f n'est pas continue à droite en 1 et en particulier, la fonction f n'est pas continue en 1.

Soit $p \geqslant 2$. Etudions la continuité en $\frac{1}{p}$ à droite. $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2} \times p = \frac{1}{p}$. D'autre part, pour $x > \frac{1}{p}$ et proche de $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p} < x < \frac{1}{p-1}$ puis $p - 1 < \frac{1}{x} < p$ et donc $f(x) = (p-1)x^2$. On en déduit que

$$\lim_{x\to\frac{1}{p}\ x>\frac{1}{p}} f(x) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \neq f\left(\frac{1}{p}\right).$$

La fonction f n'est pas continue à droite en $\frac{1}{p}$ et en particulier, le fonction f n'est pas continue en $\frac{1}{p}$.

En résumé, f est définie sur $[0, +\infty[$, continue sur $\{0\} \cup \left(\left]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right[\right) \cup]1, +\infty[$, discontinue en chaque $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, mais continue à gauche en chacun de ces points.

2. f est dérivable sur $\left(\left]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right[\right) \cup]1, +\infty[$. f n'est pas continue en chaque nombre de la forme $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, et en particulier, f n'est pas dérivable en chaque nombre de la forme $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Il reste à analyser la dérivabilité en 0. Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = xE\left(\frac{1}{x}\right)$. Ensuite, $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$ puis

$$1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leqslant 1.$$

Les membres extrêmes de cet encadrement tendent vers 1. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. Par suite, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

3.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,dx &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{8} - \frac{2}{27}\right) \\ &= \frac{216 + 27 - 16}{3 \times 216} = \frac{227}{648}.\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Les matrices I_n et $-I_n$ sont des matrices orthogonales mais la matrice $\frac{1}{2}(I_n + (-I_n)) = 0_n$ n'est pas une matrice orthogonale. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Si $n = 1$, $D_1(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$. Dorénavant, $n \geqslant 2$.

On note $E_{1,2}$ la matrice élémentaire possédant un 1 ligne 1, colonne 2, et des 0 partout ailleurs.
Soient $A = \text{diag}(1, 2, 3, \dots, n) + E_{1,2}$ et $B = \text{diag}(-1, -2, -3, \dots, -n) + E_{1,2}$. A et B sont des matrices triangulaires dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Donc, les matrices A et B sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part, $\frac{1}{2}(A+B) = E_{1,2}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est X^n. Si la matrice $\frac{1}{2}(A+B)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, cette matrice est semblable à la matrice $\text{diag}(0, \dots, 0) = 0_n$ et donc égale à 0_n ce qui est faux. Donc, la matrice $\frac{1}{2}(A+B)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que si $n \geqslant 2$, $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in [0, 1]$.
Alors, $(1 - \lambda)A + \lambda B = ((1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

D'abord, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geqslant 0$. Soit alors $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} ((1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

On a montré que $\forall (A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)A + \lambda B \in S_n(\mathbb{R})$. Donc, $S_n(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. En développant suivant la première colonne, on obtient pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\lambda + \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\lambda + \frac{3}{8} \end{vmatrix} \\
&= \left(-\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\left(-\lambda + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{\lambda}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \\
&= \left(-\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda\right) + \frac{\lambda}{8} = -\lambda\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{8}\right) \\
&= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4}\right) = -\lambda(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\text{Sp}(M) = \left(0, \frac{1}{4}, 1\right)$.

(Autre solution. Les deux dernières lignes sont égales et donc 0 est valeur propre de M. La somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1 et donc 1 est valeur propre de M et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de M : $0 + 1 + \lambda = \frac{5}{4}$ et donc $\lambda = \frac{1}{4}$).

Puisque χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, on sait que les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles.

• En profitant du fait que les deux dernières colonnes de M sont égales, $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 puis $E_0(M) = \text{Vect}(U_1)$.

• La somme des coefficients de chaque ligne de M est égale à 1. Donc, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 puis $E_1(M) = \text{Vect}(U_2)$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\left(M - \frac{1}{4}I_3\right)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{8}z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}y + \frac{1}{8}z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -x - y \\ 2x + y + 3(-x - y) = 0 \\ 2x + 3y + (-x - y) = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2y \\ z = y \end{array}\right.$$

Donc, $E_{\frac{1}{4}}(M) = \text{Vect}(U_3)$ où $U_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$, on a $AU = U$. Puisque $U \neq 0$, 1 est valeur propre de A et U est un vecteur propre associé.

Ainsi, toute matrice stochastique admet 1 pour valeur propre.

Exercice 5

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Puisque les matrices I_n et A commutent,

$$(I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}\right) = I_n - A^p = I_n = \left(I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}\right)(I_n - A).$$

Donc, la matrice $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ puis $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^kX = \lambda^kX$ puis

$$0 = A^pX = \lambda^pX.$$

Puisque $X \neq 0$, on en déduit que $\lambda^p = 0$ puis $\lambda = 0$. On a donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$ ou encore $\chi_A = (-X)^n$.

3. Mais alors, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}\left(A^k\right) = (\underbrace{0^k, \ldots, 0^k}_{n}) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$.

Autre solution. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(A^k\right)^p = (A^p)^k = 0_n$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^k est nilpotente puis toutes ses valeurs propres sont nulles.

Enfin, la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}\left(A^k\right) = n \times 0 = 0$.

4. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3,$$

puis, pour tout $n \geqslant 4$, $A^n = A^{n-3} \times A^3 = 0_n$.

5. $\det(A + B) = \det\left(A\left(I_n + A^{-1}B\right)\right) = \det(A) \times \det\left(I_n + A^{-1}B\right) = \det(A) \times \chi_{A^{-1}B}(-1)$.

Ensuite, $AB = BA$ fournit $A^{-1}ABA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$ puis $BA^{-1} = A^{-1}B$. Donc, les matrices A^{-1} et B commutent.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0_n$. Puisque les matrices A^{-1} et B commutent, $\left(A^{-1}B\right)^p = A^{-p}B^p = 0_n$. Donc, la matrice $A^{-1}B$ est nilpotente. Mais alors, d'après la question 2, $\chi_{A^{-1}B} = (-X)^n$ puis $\chi_{A^{-1}B}(-1) = (-(-1))^n = 1$.

Finalement, $\det(A+B) = \det(A) \times \chi_{A^{-1}B}(-1) = \det(A)$.

Exercice 6

1. Dans ce corrigé, on notera ${}^tA$ la transposée de A. Soient $(A_1, A_2, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de la trace et de la transposition,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2, B\right) &= \mathrm{Tr}\left({}^t\left(\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2\right)B\right) = \mathrm{Tr}\left(\lambda_1{}^tA_1B + \lambda_2{}^tA_2B\right) = \lambda_1\mathrm{Tr}\left({}^tA_1B\right) + \lambda_2\mathrm{Tr}\left({}^tA_2B\right)\\ &= \lambda_1\varphi\left(A_1, B\right) + \lambda_2\varphi\left(A_2, B\right).\end{aligned}$$

De même, pour tout $(A, B_1, B_2) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(A, \lambda_1B_1 + \lambda_2B_2\right) = \lambda_1\varphi\left(A, B_1\right) + \lambda_2\varphi\left(A, B_2\right)$.

Ainsi, φ est une forme bilinéaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On sait que pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\left({}^tAB\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tBA\right) = \varphi(B, A)$. Donc, φ est symétrique.

Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\varphi\left(A, B\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \times b_{i,j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j} \quad (*),$$

et en particulier, $\varphi(A, A) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$. On en déduit que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A, A) \geqslant 0$ et de plus, $\varphi(A, A) = 0$ entraine $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 = 0$ (réels positifs de somme nulle) puis $A = 0$.

Finalement, φ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$.

D'après la formule $(*)$, pour tout $(i, j)[\![1, 4]\!]^2$, $\varphi\left(E_i, E_j\right) = \delta_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array}\right.$.
Par suite, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \left(\varphi\left(E_i, E_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 4} = \left(\delta_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 4} = I_4$.

4. $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. N est symétrique réelle et donc N est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

La somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Donc, 1 est valeur propre de N (et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé).

La matrice $N - \dfrac{1}{4}I_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est de rang 2 car $\mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}\left(C_1, C_2, C_3, C_4\right) = \mathrm{rg}\left(C_1, C_3\right) = 2$ (en notant C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de la matrice $N - \dfrac{1}{4}I_4$).

D'après le théorème du rang, Ker $\left(A - \frac{1}{4}I_3\right)$ est de dimension $4 - 2 = 2$ puis $\frac{1}{4}$ est valeur propre d'ordre de multiplicité 2 car A est diagonalisable.

Il manque une dernière valeur propre λ qui est fournie par la trace de N :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \lambda = \mathrm{Tr}(N) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

puis $\lambda = \frac{1}{2}$.

Finalement, la matrice N est semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

