SESSION 2023

CAPESA

Analystes statisticiens

PREMIERE COMPOSITION

Exercice 1

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx = [\sin(\ln(x))]_1^2 = \sin(\ln(2)) - \sin(\ln(1)) = \sin(\ln(2))$.

2. Pour tout réel x strictement supérieur à 1,

$$|f(x)| = \frac{\left|x\sin(x) - \sqrt{x}\right|}{x^2-1} \leqslant \frac{x|\sin(x)| + \sqrt{x}}{x^2-1} \leqslant \frac{x+x}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(x\sin(x) - \sqrt{x}\right) = \sin(1) - 1 < 0$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to1,\ x>1} \left(x^2-1\right) = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to1,\ x<1} \left(x^2-1\right) = 0^-$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to1,\ x<1} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to1,\ x>1} f(x) = -\infty$.

4. $2-2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

5. Soit x un réel. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ existe $\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow x \notin \{\pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Pour $x\in D$, $-x\in D$ puis $f(-x) = \tan\left(-\dfrac{x}{2}\right)\cos(-2x) = -\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos(2x) = -f(x)$. La fonction f est impaire. Son graphe est symétrique par rapport à O l'origine du repère.

Pour $x\in D$, $x+2\pi\in D$ puis $f(x+2\pi) = \tan\left(\dfrac{x+2\pi}{2}\right)\cos(2(x+2\pi)) = \tan\left(\dfrac{x}{2}+\pi\right)\cos(2x+4\pi) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos(2x) = f(x)$. La fonction f est 2π-périodique.

On étudie donc la fonction f et on construit son graphe sur $[0,\pi[$. On obtient le graphe de la fonction f sur $]-\pi,\pi[$ par symétrie par rapport à O. On obtient enfin le graphe complet de la fonction f par translations de vecteurs de coordonnées $(2k\pi,0)$, $k\in\mathbb{Z}$.

6. Pour tout réel $x\in D_f$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\cos(2x) - 2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\sin(2x)$.

7. On note A et B les variables aléatoires égales au scores respectifs des joueurs A et B.

$$\mathbb{E}(A) = k\mathbb{P}(A=1) + 2k\mathbb{P}(A=2) + 3k\mathbb{P}(A=3) + 4k\mathbb{P}(A=4) = \frac{k(1+2+3+4)}{6} = \frac{5k}{3}$$

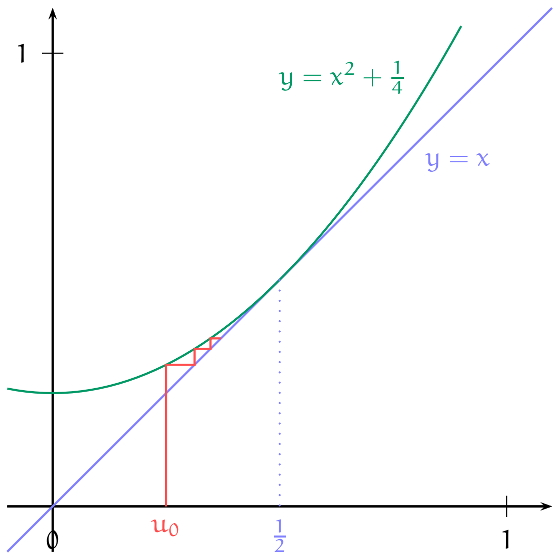
et

$$\mathbb{E}(B) = 5\mathbb{P}(B=5) + 6\mathbb{P}(B=6) = \frac{5+6}{6} = \frac{11}{6}.$$

Le jeu est équitable si et seulement si $\mathbb{E}(A-B) = 0$ ou encore $\mathbb{E}(A) - \mathbb{E}(B) = 0$ ou encore $\dfrac{5k}{3} = \dfrac{11}{6}$ ce qui équivaut à $k = \dfrac{11}{10} = 1,1$.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} > 0$ ou encore pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, ce qui reste vrai quand $n=0$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_0^2+\ldots+u_n^2} > \sqrt{u_n^2} = u_n$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2 + u_0^2$. Mais alors par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geqslant u_1^2 + (n-1)u_0^2$ puis $u_n \geqslant \sqrt{u_1^2+(n-1)u_0^2}$. Puisque $u_0\neq0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{u_1^2+(n-1)u_0^2} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

9. Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ, alors

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n^2 + \frac{1}{4}\right) = \ell^2 + \frac{1}{4}.$$

Ainsi, ℓ est un réel solution de l'équation $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$ ou encore $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$. Donc, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ℓ est nécessairement égale à $\dfrac{1}{2}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

- Le résultat est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\dfrac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. Alors,

$$\frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant u_n^2 + \frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

  et donc $\dfrac{1}{4} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + \dfrac{1}{4} = \left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{1}{2}$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, d'après la remarque initiale, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + 5x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + 5x + 1$ est $\Delta = 5^2 - 4 = 21$. Cetrinôme admet deux solutions réelles distinctes à savoir $\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}$ et $\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$. Donc, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation proposée est $\mathscr{S} = \left\{1, \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$. $\mathscr{S}$ est encore l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée.

Exercice 2

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f_a(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Le domaine de définition de la fonction f_a est $D_a =]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $f'_a(x) = \left(ax^{a-1}\ln(x) + x^a \times \dfrac{1}{x}\right)\exp\left(x^a\ln(x)\right) = x^{a-1}(a\ln(x)+1)\exp\left(x^a\ln(x)\right)$.

2. Pour $x > 0$, $f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) = \exp(x\ln(x)) \Leftrightarrow x = x\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ensuite, pour tout réel a, $f_a(1) = \exp\left(1^a\ln(1)\right) = e^0 = 1$. Les courbes représentatives C_{f_a}, $a \in \mathbb{R}$, ont en commun un point et un seul, à savoir le point de coordonnées $(1, 1)$.

3. Si $a \geqslant 0$, $x^a\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. Ensuite, si $a > 0$, pour $x > 0$, on a $\dfrac{f_a(x)}{x} = \exp\left((x^a - 1)\ln(x)\right)$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f_a(x)}{x} = +\infty$.

Si $a > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ et de plus, C_{f_a} admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

Si $a < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^a\ln(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{-a}} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Dans ce cas, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 1$. C_{f_a} admet en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y = 1$.

Enfin, si $a = 0$, pour tout réel $x > 0$, $f_0(x) = x$.

4. Si $a > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} x^a\ln(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Dans ce cas, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f_a(x) = 1$.
Si $a \leqslant 0$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} x^a\ln(x) = -\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f_a(x) = 0$.

5. • Si $a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = \lim_{x\to0,\ x>0}\left(ax^{a-1}\ln(x) + x^{a-1}\right)\exp\left(x^a\ln(x)\right) = 0$.

• Si $a = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1$ d'après un théorème de croissances comparées et donc

$$\lim_{x\to0,\ x>0} f'_1(x) = \lim_{x\to0,\ x>0}(\ln(x)+1)\exp\left(x\ln(x)\right) = -\infty.$$

• Si $0 < a < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} x^{a-1} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}(a\ln(x)+1) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} x\exp\left(x^a\ln(x)\right) = 1$ et donc

$$\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = -\infty.$$

• $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_0(x) = 1$.

• Si $a < 0$, pour $x > 0$ et proche de 0 de sorte que $a\ln(x) + 1 > 0$,

$$\begin{aligned}\ln\left(f'_a(x)\right) &= (a-1)\ln(x) + \ln(a\ln(x)+1) + x^a\ln(x) = (x^a + a - 1)\ln(x) + \ln(a\ln(x)+1)\\ &= (x^a + a - 1)\ln(x) + \ln(a\ln(x)) + \ln\left(1 + \frac{1}{a\ln(x)}\right).\end{aligned}$$

Déjà, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\ln\left(1 + \frac{1}{a\ln(x)}\right)$. Ensuite, en écrivant $(x^a + a - 1)\ln(x) + \ln(a\ln(x)) = a\ln(x)\left(\dfrac{1}{a}(x^a + a - 1) + \dfrac{\ln(a\ln(x))}{a\ln(x)}\right)$, on a $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{\ln(a\ln(x))}{a\ln(x)} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{1}{a}(x^a + a - 1) = -\infty$.
Donc, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{1}{a}(x^a + a - 1) + \frac{\ln(a\ln(x))}{a\ln(x)} = -\infty$ puis $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}(x^a + a - 1)\ln(x) + \ln(a\ln(x)) = -\infty$. Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\ln\left(f'_a(x)\right) = -\infty$ puis $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = \lim_{x\to0,\ x>0} e^{\ln\left(f'_a(x)\right)} = 0$.

En résumé, si $a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = 0$, si $a = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = 1$, si $0 < a < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = -\infty$, si $a = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = 1$ et si $a < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0} f'_a(x) = 0$,

6. Pour tout réel a, $f_a(1) = 1$ et $f'_a(1) = 1^{a-1}(a\ln(1)+1)\exp\left(1^a\ln(1)\right) = 1$. Donc, pour tout réel a, une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f_a en son point d'abscisse 1 est $y = x$.

7. Soit $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que pour tout $x > 0$, $f'_a(x) = x^{a-1}(a\ln(x) + 1)\exp\left(x^a \ln(x)\right)$ et donc, $f'_a(x)$ est du signe de $a\ln(x) + 1$.

1er cas. Si $a = 0$, pour tout réel $x > 0$, $f_0(x) = x$. La fonction f_0 est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2ème cas. Si $a > 0$, la fonction f'_a est strictement négative sur $\left]0, e^{-\frac{1}{a}}\right[$, strictement positive sur $\left]e^{-\frac{1}{a}}, +\infty\right[$ et s'annule en $e^{-\frac{1}{a}}$ avec $e^{-\frac{1}{a}} \in]0, 1[$. La fonction f_a admet un minimum local en $e^{-\frac{1}{a}}$ qui est aussi un minimum global. Ce minimum est

$$f_a\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = \exp\left(\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^a \ln\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{ea}\right).$$

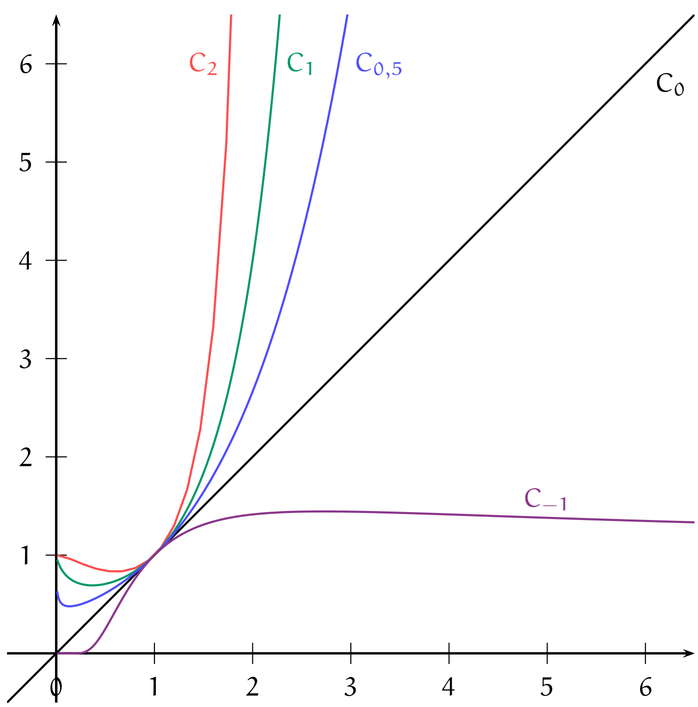
Le tableau de variation de la fonction f_a est

x	0		$e^{-\frac{1}{a}}$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	
f_a	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{ea}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3ème cas. Si $a < 0$, la fonction f'_a est strictement positive sur $\left]0, e^{-\frac{1}{a}}\right[$, strictement négative sur $\left]e^{-\frac{1}{a}}, +\infty\right[$ et s'annule en $e^{-\frac{1}{a}}$ avec $e^{-\frac{1}{a}} \in]1, +\infty[$. La fonction f_a admet un maximum local en $e^{-\frac{1}{a}}$ qui est aussi un maximum global, égal à $\exp\left(-\frac{1}{ea}\right)$. Le tableau de variation de la fonction f_a est

x	0		$e^{-\frac{1}{a}}$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	0	$-$	
f_a	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{ea}}$	$\searrow$	1

8. Graphiques.



9. $f_{-0,1}\left(10^{10}\right) = \exp\left(\left(10^{10}\right)^{-0,1} \ln\left(10^{10}\right)\right) = \exp\left(10^{-1} \times 10\ln(10)\right) = 10.$

On sait que la fonction $f_{-0,1}$ a un maximum atteint en $e^{-\frac{1}{-0,1}} = e^{10} = 22\ 026,4\ldots$ et que ce maximum est égal à $e^{-\frac{1}{e(-0,1)}} = e^{\frac{10}{e}} = 39,5\ldots$ puis que la fonction $f_{-0,1}$ est décroissante sur $\left[e^{10}, +\infty\right[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{-0,1}(x) = 1$. Le fait que $f_{-0,1}\left(10^{10}\right) = 10$ montre que la décroissance vers 1 est très lente.

Exercice 3

1. (a) $f(-1) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{8}$, $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(1) = -\dfrac{3}{2}$.

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Ensuite, $f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} + 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{1}{2} = 0,58\ldots$ et $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = -\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{1}{2} = -1,58\ldots$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

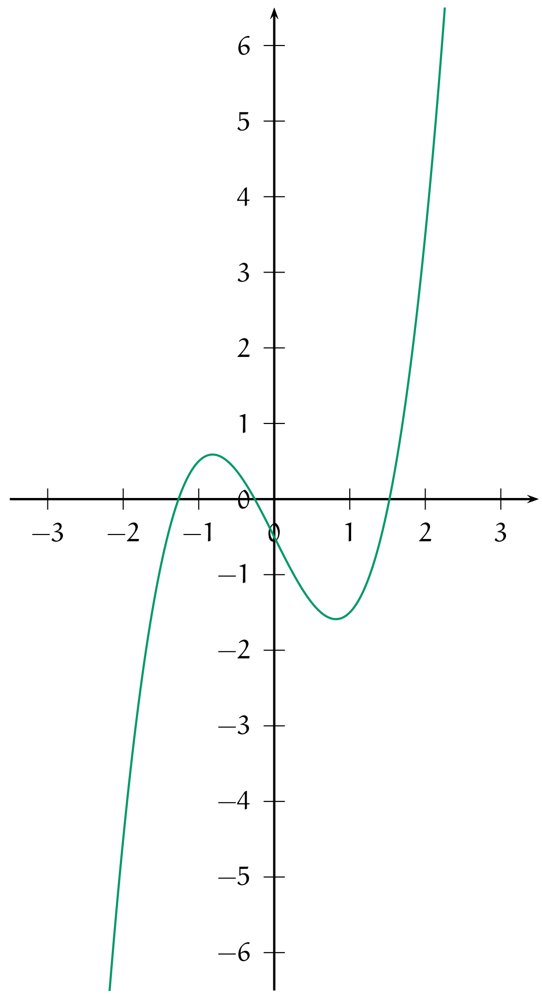
(c) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $f(-1) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule au moins une fois dans $]-\infty, -1[$. De même, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) > 0$ et $f(0) < 0$ puis $f(1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$ et donc la fonction f s'annule au moins une fois dans $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$ et au moins une fois dans $]1, +\infty[$. En résumé, la fonction f s'annule en au moins trois réels deux à deux distincts x_1, x_2 et x_3.

Puisque f est un polynôme de degré 3, la fonction f s'annule en exactement trois réels deux à deux distincts x_1, x_2 et x_3 vérifiant

$$x_1 < -1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0 < 1 < x_3.$$

Voir graphique page suivante.

(d) Représentation graphique de la fonction f.



2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x)$ existe si et seulement si $\tan(x)$ existe et $1 + 2\cos(x) \neq 0$. Or $2\cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Le domaine de définition de la fonction g est

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

(b) Soit $x \in D_g$. Alors, $-x \in D_g$ puis $g(-x) = \dfrac{\tan(-x)}{1 + 2\cos(-x)} = -\dfrac{\tan(x)}{1 + 2\cos(x)} = -g(x)$. g est impaire.

Soit $x \in D_g$. Alors, $x + 2\pi \in D_g$ puis $g(x + 2\pi) = \dfrac{\tan(x + 2\pi)}{1 + 2\cos(x + 2\pi)} = \dfrac{\tan(x)}{1 + 2\cos(x)} = g(x)$. g est 2π-périodique.

On étudie la fonction g et on construit son graphe sur $D = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$. On obtient alors le graphe de g sur $\left[-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$ par symétrie centrale de centre O puis on obtient le graphe complet par translations de vecteurs de coordonnées $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos(x)) = 1 > 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} g(x) = -\infty$. En particulier, la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g.

$\displaystyle\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}} \tan(x) = -\sqrt{3} < 0$ et de plus, $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^-} (1 + 2\cos(x)) = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^+} (1 + 2\cos(x)) = 0^-$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^-} g(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^+} g(x) = +\infty$. En particulier, la droite d'équation $x = \dfrac{2\pi}{3}$ est asymptote à la courbe représentative de g.

(d) La fonction g est dérivable sur D en tant que quotient de fonctions dérivables sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. De plus, pour $x \in D$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x)}(1+2\cos(x)) - \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \times (-2\sin(x))}{(1+2\cos(x))^2} = \frac{(1+2\cos(x)) + 2\sin^2(x)\cos(x)}{\cos^2(x)(1+2\cos(x))^2} \\
&= \frac{(1+2\cos(x)) + 2\left(1-\cos^2(x)\right)\cos(x)}{\cos^2(x)(1+2\cos(x))^2} = \frac{-2\cos^3(x)+4\cos(x)+1}{\cos^2(x)(1+2\cos(x))^2} \\
&= \frac{-2f(\cos(x))}{\cos^2(x)(1+2\cos(x))^2}
\end{aligned}$$

(e) D'après la question précédente, sur D, la fonction g' est du signe de la fonction $x \mapsto -f(\cos(x))$.

L'étude de la fonction f effectuée à la question 1 montre que la fonction est strictement positive sur $[-1, x_2[$, strictement négative sur $]x_2, 1]$ et s'annule en x_2. De plus, le réel x_2 vérifie $-\dfrac{1}{2} < x_2 < 0$. Soit α l'unique réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = x_2$. Par stricte décroissance de la fonction $t \mapsto \cos(t)$ sur $[0, \pi]$,

$$-\frac{1}{2} < x_2 < 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \cos(\alpha) < \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}.$$

Toujours par stricte décroissance de la fonction $t \mapsto \cos(t)$ sur $[0, \pi]$,

$$x \in [0, \alpha[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow \cos(x) \in]x_2, 1] \Rightarrow f(\cos(x)) < 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

et

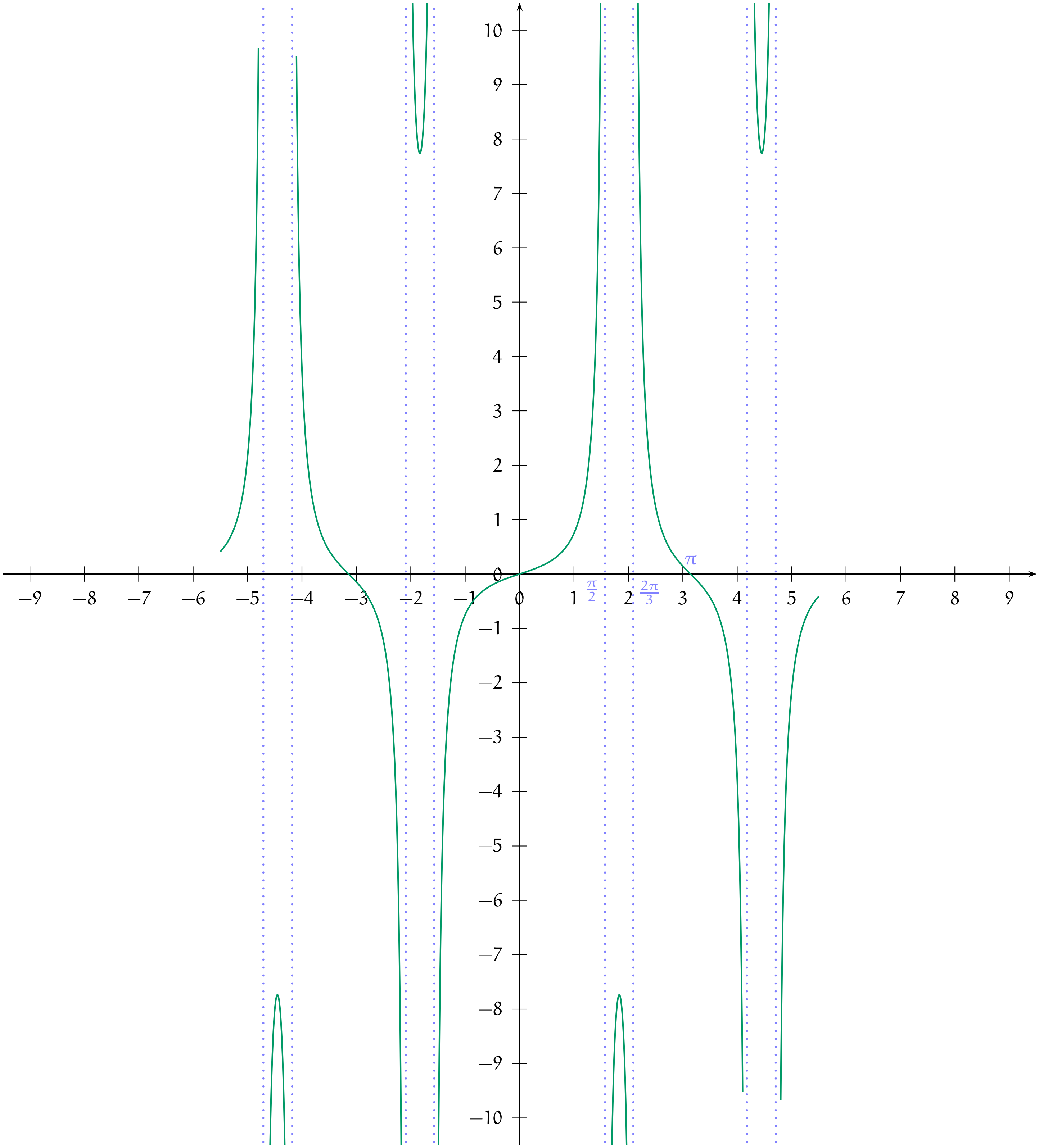
$$x \in]\alpha, \pi] \setminus \left\{\frac{2\pi}{3}\right\} \Rightarrow \cos(x) \in [-1, x_2[\Rightarrow f(\cos(x)) > 0 \Rightarrow g'(x) < 0.$$

Enfin, $g'(\alpha) = 0$. En particulier, la fonction g' s'annule en un et un seul réel de D.

(f) L'étude du signe de la fonction g' permet de dresser le tableau de variation de la fonction g dur D :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		α		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

(g) Représentation graphique de la fonction g. Voir page suivante


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
π

Exercice 4

1. $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+x}\,dx = [\ln(2+x)]_0^1 = \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \in [0,1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ puis $0 < 1+x+x^{n+1} \leqslant 1+x+x^n$ et donc $\frac{1}{1+x+x^n} \leqslant \frac{1}{1+x+x^{n+1}}$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que $I_n \leqslant I_{n+1}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant I_{n+1}$ et donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \in [0,1]$, $1+x+x^n \geqslant 1+x > 0$ et donc $\frac{1}{1+x+x^n} \leqslant \frac{1}{1+x}$. Par croissance de l'intégration, $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2)$.

4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 2 et majorée par $\ln(2)$ d'après la question précédente. Donc, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\ln(2) - I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^n}\right)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x+x^n-1-x}{(1+x)(1+x+x^n)}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)(1+x+x^n)}\,dx.\end{aligned}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)(1+x+x^n)}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{(1+0)(1+0+0^n)}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)(1+x+x^n)}\,dx = 0$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln(2).$$

Exercice 5

1. (a) Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}+n} \geqslant \sqrt{n}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$ car $u_0 = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \sqrt{2n}$.

- $u_0 = 1 \leqslant \sqrt{2}$. L'inégalité est donc vraie si $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant \sqrt{2n}$. On a $n^2+1 \geqslant 0$ puis $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geqslant 2n$ et donc $\sqrt{2n} \leqslant n+1$. On en déduit que

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n+n+1} \leqslant \sqrt{\sqrt{2n}+n+1} \leqslant \sqrt{n+1+n+1} = \sqrt{2(n+1)}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \sqrt{2n}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{u_{n-1}+n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} \leqslant \sqrt{1+\frac{\sqrt{2(n-1)}}{n}}$. D'autre part, $u_n \geqslant \sqrt{n}$ et donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1+\frac{\sqrt{2(n-1)}}{n}}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers 1. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

2. (a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\times\dfrac{\sqrt{n-1}}{n}=1\times 0=0.$

(b) Pour tout réel $x\in[-1,0[\cup]0,+\infty[$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

(c) D'après les deux questions précédentes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}-1}{\dfrac{u_{n-1}}{n}}=\dfrac{1}{2}.$

3. Pour tout $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}u_n-\sqrt{n}=\sqrt{n+u_{n-1}}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1\right)=\sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{n}\times\frac{\sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}-1}{\dfrac{u_{n-1}}{n}}\\=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\times\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\times\frac{\sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}-1}{\dfrac{u_{n-1}}{n}}\end{aligned}$$

D'après les questions 1.a) et 2.c),

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Exercice 6

1. Soit $z\in\mathbb{U}$. $|\overline{a}z|=|\overline{a}|\,|z|=|a|\neq 1$ et en particulier $\overline{a}z\neq -1$ ou encore $1+\overline{a}z\neq 0$. Donc, $f_a(z)$ existe dans $\mathbb{C}$. La fonction f_a est donc bien définie sur $\mathbb{U}$.

2. Soit $z\in\mathbb{C}$. $z\in\mathbb{U}\Leftrightarrow |z|=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow z\times\overline{z}=1\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

3. Soit $z\in\mathbb{U}$. $|1+\overline{a}z|=\left|\overline{1+\overline{a}z}\right|=|1+a\overline{z}|=\left|1+\dfrac{a}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}\times|z+a|=|z+a|$ puis

$$|f_a(z)|=\frac{|z+a|}{|1+\overline{a}z|}=\frac{|z+a|}{|z+a|}=1.$$

Donc, pour tout $z\in\mathbb{U}$, $f_a(z)$ est un élément de $\mathbb{U}$.

4. Soit $t\in\mathbb{U}$. Soit $z\in\mathbb{C}$. En appliquant la question 1 aux nombres complexes t qui est dans $\mathbb{U}$ et $-a$ qui n'est pas de module 1, on obtient $1-\overline{a}t\neq 0$ puis

$$\begin{aligned}f_a(z)=t\Leftrightarrow\frac{z+a}{1+\overline{a}z}=t\Leftrightarrow z+a=t+\overline{a}tz\Leftrightarrow z(1-\overline{a}t)=t-a\\\Leftrightarrow z=\frac{t-a}{1-\overline{a}t}\Leftrightarrow z=\frac{t+(-a)}{1+\overline{(-a)}t}.\end{aligned}$$

Enfin, puisque $|-a|\neq 1$ et $t\in\mathbb{U}$, $\dfrac{t+(-a)}{1+\overline{(-a)}t}\in\mathbb{U}$ d'après la question 2.

On a montré que pour tout $t\in\mathbb{U}$, il existe un et un seul $z\in\mathbb{U}$ tel que $f_a(z)=t$, à savoir $z=\dfrac{t+(-a)}{1+\overline{(-a)}t}$.

5. Mais alors, f_a est une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$. De plus, pour tout $(z,t)\in\mathbb{U}^2$, $f_a(z)=t\Leftrightarrow z=f_{-a}(t)$. Ceci montre que $f_a^{-1}=f_{-a}$.

6. Pour tout $z\in\mathbb{U}$, $f_a(z)\in\{1,i,-1,-i\}\Leftrightarrow z\in\left\{f_a^{-1}(1),f_a^{-1}(i),f_a^{-1}(-1),f_a^{-1}(-i)\right\}\Leftrightarrow z\in\{f_{-a}(1),f_{-a}(i),f_{-a}(-1),f_{-a}(-i)\}$.

(a) Si $a=2$, pour tout $t\in\mathbb{U}$, $f_{-2}(t)=\dfrac{t-2}{1-2t}$ puis $f_{-2}(1)=1$, $f_2(-1)=-1$, puis

$$f_{-2}(i)=\frac{i-2}{1-2i}=\frac{(-2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-2-2+i-4i}{1^2+2^2}=\frac{-4-3i}{5}$$

et enfin, $f_{-2}(-i)=\overline{f_{-2}(i)}=\dfrac{-4+3i}{5}$. Ainsi, pour $z\in\mathbb{U}$,

$$f_2(z)\in\{1,i,-1,-i\}\Leftrightarrow z\in\left\{1,-1,\frac{-4-3i}{5},\frac{-4+3i}{5}\right\}.$$

(b) Si $a=2i$, pour tout $t\in\mathbb{U}$, $f_{-2i}(t)=\dfrac{t-2i}{1+2it}$ puis $f_{-2i}(i)=i$, $f_{-2i}(-i)=-i$, puis

$$f_{-2i}(1)=\frac{1-2i}{1+2i}=\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-3-4i}{5}$$

et de même $f_{-2i}(-1)=\dfrac{-1-2i}{1-2i}=\dfrac{(-1-2i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{3-4i}{5}$. Ainsi, pour $z\in\mathbb{U}$,

$$f_{2i}(z)\in\{1,i,-1,-i\}\Leftrightarrow z\in\left\{i,-i,\frac{--3+4i}{5},\frac{-3-4i}{5}\right\}.$$

(c) Si $a=1+i$, pour tout $t\in\mathbb{U}$, $f_{-(1+i)}(t)=\dfrac{t-1-i}{1+(-1+i)t}$.

Ensuite, $f_{-(1+i)}(1)=\dfrac{-i}{i}=-1$ puis $f_{-(1+i)}(-1)=\dfrac{-2-i}{2-i}=\dfrac{(-2-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{-3-4i}{5}$ puis

$$f_{-(1+i)}(i)=\frac{i-1-i}{1+(-1+i)i}=\frac{-1}{-i}=-i$$

et enfin, $f_{-(1+i)}(-i)=\dfrac{-i-1-i}{1+(-1+i)(-i)}=\dfrac{-1-2i}{2+i}=\dfrac{(-1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{-4-3i}{5}$. Ainsi, pour $z\in\mathbb{U}$,

$$f_{1+i}(z)\in\{1,i,-1,-i\}\Leftrightarrow z\in\left\{-1,\frac{-3-4i}{5},-i,\frac{-4-3i}{5}\right\}.$$

Exercice 7

1. Soit $k\in[\![1,5]\!]$. Il y a deux multiples de 3 compris au sens large entre 1 et 6, à savoir 3 et 6. Donc, $\mathbb{P}(X_k=3)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X_k=-2)=\dfrac{2}{3}$.

2. Soit $k\in[\![1,5]\!]$. $X_k=3\Leftrightarrow Y_k=\dfrac{3+2}{5}\Leftrightarrow Y_k=1$ et $X_k=-2\Leftrightarrow Y_k=0$ puis

$$\mathbb{P}(Y_k=1)=\mathbb{P}(X_k=3)=\frac{1}{3}\text{ et }\mathbb{P}(Y_k=0)=\mathbb{P}(X_k=-2)=\frac{2}{3}.$$

La variable Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$. Mais alors, la variable S qui est le nombre de succès en 5 lancers indépendants (un succès consistant à se déplacer de trois cases vers la droite), suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\dfrac{1}{3}$.

Ensuite, gagner le jeu équivaut à $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}X_k\geqslant 0$. Or, $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{X_k+2}{5}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}X_k+2$ et donc

$$\sum_{k=1}^{5}X_k\geqslant 0\Leftrightarrow S\geqslant 2.$$

3. La probabilité p de gagner le jeu est donc

$$p=\mathbb{P}(S\geqslant 2)=1-\mathbb{P}(S=0)-\mathbb{P}(S=1)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5-5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{243-32-5\times 16}{243}$$
$$=\frac{131}{243}=0,539\ldots$$

4. (a) On reprend les calculs précédents en remplaçant $\dfrac{1}{3}$ par $\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{2}{3}$ par $\dfrac{5}{6}$. On obtient

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(S \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(S=0) - \mathbb{P}(S=1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7776 - 3125 - 3125}{7776} \\ &= \frac{1526}{7776} = 0,196\ldots \end{aligned}$$

(b) Dans le cas de 10 lancers avec la règle de la question 3, on a $S = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{10} X_k + 4$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} X_k \geqslant 0 \Leftrightarrow S \geqslant 4$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(S \geqslant 4) = 1 - \mathbb{P}(S=0) - \mathbb{P}(S=1) - \mathbb{P}(S=2) - \mathbb{P}(S=3) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 10\left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{10\times 9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{59\ 049 - 1024 - 10\times 512 - 45\times 256 - 120\times 128}{59\ 049} \\ &= \frac{33\ 705}{59\ 049} = 0,57\ldots \end{aligned}$$

