ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

On considère l'espace vectoriel R^4 rapporté à la base canonique. Soit f l'endomorphisme de R^4 représenté par la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'image de f.

2. Etudier la diagonalisation de f (on déterminera les valeurs propres et des vecteurs propres pour la valeur propre double).

3. Soit q la forme quadratique sur R^4 définie par :
$q(x, y, z, t) = 4z^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz + 4zt$. Cette forme quadratique est-elle positive ?

4. Résoudre le système suivant, où m et p sont des paramètres réels :
$$\begin{cases} y + z + t = 1 \\ x + 2z = m^2 + 1 \\ x + 2y + 4z + 2t = p + 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice n° 2

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, puis $S = \{M \in E \ / \ M = M'\}$ et $A = \{M \in E \ / \ M = -M'\}$, où M' désigne la matrice transposée.

1. Déterminer la dimension de S et celle de A.

2. Montrer que E est la somme directe de S et A.

3. Soit $M \in A$, étudier la diagonalisation de M dans R et dans C (ensemble des nombres complexes).

4. Soit la matrice particulière

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de vecteurs propres complexes de M. Indiquer comment calculer M^n pour n entier supérieur à 1 (le calcul explicite n'est pas demandé).

Exercice n° 3

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de R^3 muni du produit scalaire standard. On note D la droite vectorielle engendrée par le vecteur e_1 et E l'orthogonal de D.

1. Déterminer les matrices des endomorphismes de R^3 suivants dans la base B :
- Rotation autour de D et d'angle α. On notera R cette matrice. (On rappelle qu'une matrice de rotation est une matrice orthogonale de déterminant égal à 1).
- Projection orthogonale sur D. On notera P_1 cette matrice.
- Projection orthogonale sur E. On notera P_2 cette matrice.

2. Exprimer R à l'aide de P_1, P_2 et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de l'application linéaire associée à M ?

3. Exprimer $\cos\alpha$ en fonction de la trace de R.
Exprimer M en fonction de R, R' (transposée de R) et α pour $\alpha \neq k\pi \, (k \in Z)$.

4. Soient u et v deux rotations de R^3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $u \, o \, v = v \, o \, u$
(ii) u et v ont les mêmes vecteurs invariants **ou** u et v sont des symétries par rapport à deux droites orthogonales.

Exercice n° 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.

2. Donner un développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de zéro. On écrira f sous la forme $f(x) = \sum_{p \geq 0} B_p \dfrac{x^p}{p!}$. Que valent $B_0, ..., B_4$?

3. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

4. Calculer $I = \int_1^2 \dfrac{f(x)}{x} dx$.

Exercice n° 5

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^2 \, Ln\,(1 + x^2)$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ et le premier terme $u_0 > 0$.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice n° 6

1. En se servant du développement en série entière de la fonction $x \to \frac{1}{1-x}$, calculer pour $0 < x < 1$, la somme des séries $\sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\, x^{k-1}$

2. Soit n un entier naturel non nul fixé. Calculer le développement en série entière de la fonction $x \to \frac{1}{(1-x)^n}$ et en déduire la somme de la série : $\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k$, où C_n^p désigne le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n.