**SESSION 2022**

# CAPESA

DEUXIEME COMPOSITION

---

## Exercice 1

**1.** On note $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

La matrice $M$ a le même rang que les matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (suppression de $C_4$ car $C_4 = C_2$) puis $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (suppression de $L_4$ car $L_4 = L_2$)

puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $(C_1 \leftrightarrow C_3)$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$

puis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (suppression de $C_2$ car $C_2 = -2C_3$).

Cette dernière matrice a un rang égal à 2 car par exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc, $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$. Les deux vecteurs $f(e_1) = e_2 + e_3 + e_4$ et $f(e_2) = e_1 + 2e_3$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\text{Im}(f)$. Puisque $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + 2e_3)$ est une base $\text{Im}(f)$.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + 2e_3)\,.$$

**2.** $M$ est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral. $f$ est donc un endomorphisme diagonalisable. Le polynôme caractéristique de $f$ est

$$\chi_f = \chi_M = \det(M - XI_4) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4-X & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 2 & X \\ 1 & 2 & 4-X & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -X \end{vmatrix} \ (C_4 \leftarrow C_4 - C_2)$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 2 & 4-X \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4-X \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ (en développant suivant la dernière colonne)}$$

$$= -X\left(-X\left(X^2 - 4X - 4\right) - (-X + 2) + (2 + X)\right) + X\left(-X(4) - (2) + (-X + 2)\right)$$

$$= X\left(\left(X^3 - 4X^2 - 6X\right) - (5X)\right) = X\left(X^3 - 4X^2 - 11X\right)$$

$$= X^2\left(X^2 - 4X - 11\right) = X^2\left(X - 2 - \sqrt{15}\right)\left(X - 2 + \sqrt{15}\right).$$

Donc, $\text{Sp}(f) = \left(0, 0, 2 - \sqrt{15}, 2 + \sqrt{15}\right)$.

$0$ est valeur propre double de $f$. Déterminons une base $E_0(M) = \text{Ker}(M)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(M) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y + z + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y + 4z + 2t = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ y + z + t = 0 \\ -2z + 2y + 4z + 2t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ y + z + t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ y = -z - t \end{array}\right. .$$

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \left\{(-2z, -z-t, z, t),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{z(-2,-1,1,0) + t(0,0,-1,1),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ où $u_1 = -2e_1 - e_2 + e_3$ et $u_2 = -u_3 + u_4$.

**3.** La forme quadratique $q$ a pour matrice dans la base canonique la matrice $M$. $M$ admet une valeur propre strictement négative à savoir $2-\sqrt{15}$. Donc, la forme quadratique $q$ n'est pas positive car l'image par $q$ d'un vecteur propre unitaire (pour le produit scalaire usuel) de $M$ associé à la valeur propre $2-\sqrt{15}$ est $2-\sqrt{15} < 0$.

**4.** Notons $(S)$ le système à résoudre et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(S)$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z+t=1 \\ x+2z=m^2+1 \\ x+2y+4z+2t=p+2 \\ x+(m-1)y+2z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z+m^2+1 \\ y+z+t=1 \\ -2z+m^2+1+2y+4z+2t=p+2 \\ -2z+m^2+1+(m-1)y+2z=2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z+m^2+1 \\ y+z+t=1 \\ y+z+t=\dfrac{1}{2}\left(-m^2+p+1\right) \\ (m-1)y=-(m-1)(m+1) \end{array}\right.$$

On note alors que $\dfrac{1}{2}\left(-m^2+p+1\right) = 1 \Leftrightarrow -m^2+p+1 = 2 \Leftrightarrow p = m^2+1$.

**1er cas.** Si $p \neq m^2+1$, le système n'a pas de solution.

**2ème cas.** Si $p = m^2+1$, $S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z+m^2+1 \\ y+z+t=1 \\ (m-1)y=-(m-1)(m+1) \end{array}\right.$.

**1er sous-cas.** Si $m \neq 1$,

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-m-1 \\ x=-2z+m^2+1 \\ -m-1+z+t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-m-1 \\ x=-2z+m^2+1 \\ t=-z+m+2 \end{array}\right..$$

**2ème sous-cas.** Si $m = 1$,

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z+2 \\ y+z+t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z+2 \\ y=-z-t+1 \end{array}\right..$$

En résumé, si $p \neq m^2+1$, $\mathscr{S} = \varnothing$, si $p = m^2+1$ et $m \neq 1$, $\mathscr{S} = \left\{(-2z+m^2+1, -m-1, z, -z+m+2),\ z \in \mathbb{R}\right\}$ et si $m = 1$ et $p = m^2+1 = 2$, $\mathscr{S} = \left\{-2z+2, -z-t+1, z, t),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

# Exercice 2

**1.** On note $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} S &= \left\{\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix},\ (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^4\right\} \\ &= \left\{aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} + d\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right) + e\left(E_{1,3}+E_{3,1}\right) + f\left(E_{2,3}+E_{3,2}\right),\ (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6\right\} \\ &= \text{Vect}\left(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2}\right). \end{aligned}$$

Donc, $\dim(S) \leqslant 6$. Vérifions alors que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2})$ est libre.
Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned} aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} + d\left(E_{1,2}+E_{2,1}\right) + e\left(E_{1,3}+E_{3,1}\right) + f\left(E_{2,3}+E_{3,2}\right) = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = 0_3 \\ &\Rightarrow a = b = c = d = e = f = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2})$ est libre et donc cette famille est une base de $S$. On en déduit que $\dim(S) = 6$.

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ a\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right) + b\left(E_{1,3} - E_{3,1}\right) + c\left(E_{2,3} - E_{3,2}\right),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2}\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\dim(A) \leqslant 3$. Vérifions alors que la famille $(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2})$ est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
a\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right) + b\left(E_{1,3} - E_{3,1}\right) + c\left(E_{2,3} - E_{3,2}\right) = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\
&\Rightarrow a = b = c = 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2})$ est libre et donc cette famille est une base de $A$. On en déduit que $\dim(A) = 3$.

**2.** Soit $M \in E$. $M = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$. De plus, $\left(\frac{1}{2}\left(M + M^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$ et donc $\frac{1}{2}\left(M + M^T\right) \in S$. De même, $\left(\frac{1}{2}\left(M - M^T\right)\right)^T = -\frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$ et donc $\frac{1}{2}\left(M - M^T\right) \in A$. Ainsi, tout élément de $E$ est somme d'un élément de $S$ et d'un élément de $A$. Ceci montre que $E = S + A$.

Ainsi, $E = S + A$ et d'autre part, $\dim(S) + \dim(A) = 6 + 3 = 9 = \dim(E)$. On sait alors que $E = S \oplus A$.

**3.** Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ puis $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in A$.

$$\begin{aligned}
\chi_M &= \begin{vmatrix} -X & a & b \\ -a & -X & c \\ -b & -c & -X \end{vmatrix} = -X\left(X^2 + c^2\right) + a(-aX + bc) - b(ac + bX) = -X^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)X \\
&= -X\left(X^2 + a^2 + b^2 + c^2\right).
\end{aligned}$$

**1er cas.** Si $(a,b,c) = (0,0,0)$, $M = 0_3$ et donc $M$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**2ème cas.** Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, alors $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Dans ce cas, $\chi_M$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc $M$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Par contre, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \left(0, -i\sqrt{a^2+b^2+c^2}, i\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$. $\chi_M$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et en particulier diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

En résumé, une matrice anti-symétrique $M$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $M = 0$ et d'autre part, toute matrice anti-symétrique est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

**4.** D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = (0, -3i, 3i)$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

$$X \in E_0(M) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - 2z = 0 \\ -x + 2z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2z \\ x = 2z \end{array} \right. .$$

$E_0(M) = \mathrm{Vect}(u_1)$ où $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

$$X \in E_{3i}(M) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3ix+y-2z=0 \\ -x-3iy+2z=0 \\ 2x-2y-3iz=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3ix+2z \\ -x-3i(3ix+2z)+2z=0 \\ 2x-2(3ix+2z)-3iz=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3ix+2z \\ 8x+2(1-3i)z=0 \\ 2(1-3i)x-(4+3i)z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3ix+2z \\ x=\dfrac{-1+3i}{4}z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+3i}{4}z \\ y=-\dfrac{1+3i}{4}z \end{array}\right.$$

$E_{3i}(M) = \mathrm{Vect}\,(u_2)$ où $u_2 = \begin{pmatrix} -1+3i \\ -1-3i \\ 4 \end{pmatrix}$.

• Un calcul conjugué (puisque $M$ est réelle) fournit $E_{-3i}(M) = \mathrm{Vect}\,(u_2)$ où $u_3 = \begin{pmatrix} -1-3i \\ -1+3i \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(0, 3i, -3i)$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1+3i & -1-3i \\ 2 & -1-3i & -1+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Mais alors, pour tout entier naturel non nul $n$, $M^n = PD^nP^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(0, (3i)^n, (-3i)^n\right) P^{-1}$.

## Exercice 3

On suppose de plus que $\mathbb{R}^3$ est orienté de sorte que la base $(e_1, e_2, e_3)$ est directe.

**1.** On sait que $r_{e_1,\alpha}(e_1) = e_1$ et que la restriction de $r_{e_1,\alpha}$ à $E$ (orienté par $e_1$ de sorte que $(e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe de $E$) est la rotation d'angle $\alpha$. Donc,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $p_D(e_1) = e_1$ et $p_D(e_2) = p_D(e_3) = 0$. Donc, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $P_2 = I_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** Immédiatement, $R = P_1 + \cos(\alpha)P_2 + \sin(\alpha)M$. D'autre part, si $f$ est l'endomorphisme de matrice $M$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$, alors $f = p_E \circ r_{e_1,\frac{\pi}{2}}$.

**3.** $\mathrm{Tr}(R) = 2\cos(\alpha) + 1$ et donc $\cos(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Tr}(R) - 1}{2}$.

$P_1$ et $P_2$ sont symétriques et donc $P_1 + \cos(\alpha)P_2$ est symétrique. $\sin(\alpha)M$ est anti-symétrique et donc $\sin(\alpha)M$ est la partie anti-symétrique de $R$. ou encore $\sin(\alpha)M = \dfrac{1}{2}\left(R - R^T\right)$. Puisque $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, $\sin(\alpha) \neq 0$ et finalement

$$M = \frac{1}{2\sin(\alpha)}\left(R - R^T\right).$$

**4.** On suppose que $u$ et $v$ sont distincts de l'identité ou encore on suppose que $u$ et $v$ sont des « vraies rotations ».

On rappelle

- qu'une symétrie orthogonale par rapport à une droite $D$ est une rotation d'angle $\pi$ autour de cette droite,
- qu'une rotation d'angle $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ admet une valeur propre et une seule à savoir $1$ et que le sous-espace propre associé à la valeur propre $1$ ou encore l'espace des invariants par la rotation, est une droite à savoir son axe.

- qu'une rotation d'angle $\pi$ admet deux valeurs propres à savoir $1$ et $-1$ et que les sous-espaces propres respectivement associés sont une droite (l'axe) et un plan, orthogonaux l'un à l'autre.

Soient $u$ et $v$ deux rotations distinctes de l'identité. On suppose que $u$ est la rotation d'angle $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ autour du vecteur unitaire $e$ et que $v$ est la rotation d'angle $\alpha' \notin 2\pi\mathbb{Z}$ autour du vecteur unitaire $e'$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons que $u \circ v = v \circ u$. $v$ laisse donc stable les sous-espaces propres de $u$.

Le sous-espace propre de $u$ associé à la valeur propre $1$ est $D = \text{Vect}(e)$. $v$ laisse stable $\text{Vect}(e)$ et donc $e$ est un vecteur propre de $v$. Par suite, $v(e) = e$ ou $v(e) = -e$.

- Si $v(e) = e$, alors $D' = D$ puis $u$ et $v$ ont les mêmes invariants.

- Si $v(e) = -e$, alors $v$ est nécessairement une symétrie orthogonale (car admet $-1$ pour valeur propre) et $e$ est dans $\text{Ker}(v + \text{Id}) = e^{\perp}$. Donc, la droite $D'$ est orthogonale à $D$. D'autre part, $u$ laisse stable $D' = \text{Vect}\,(e')$. Puisque $e'$ est un vecteur non nul n'appartenant pas à $D$ (car $D$ est orthogonale à $D'$), on a nécessairement $u\,(e') = -e'$. Mais alors, $u$ admet $-1$ pour valeur propre et est donc nécessairement une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

En résumé, si $u \circ v = v \circ u$, alors $u$ et $v$ ont les mêmes invariants ou $u$ et $v$ sont des symétries orthogonales par rapport à des droites.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $u$ et $v$ ont les mêmes invariants, $u$ et $v$ sont des rotations de même axe et donc commutent. Supposons maintenant que $u$ et $v$ sont des symétries orthogonales par rapport à des droites orthogonales. Notons $D = \text{Vect}(e)$ et $D' = \text{Vect}\,(e')$ les axes respectifs de ces symétries orthogonales où $e$ et $e'$ sont des vecteurs unitaires.
Posons $e_1 = e$ et $e_2 = e'$. La famille $(e_1, e_2)$ est une famille orthonormée que l'on complète en $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On a $u\,(e_1) = e_1$ et $u\,(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in e^{\perp} = \text{Ker}(u + \text{Id})$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée et que $u$ est un automorphisme orthogonal, la matrice $U$ de $u$ dans $\mathbb{B}$ est orthogonale et admet $1$ pour valeur propre simple et $-1$ pour valeur propre double. Cette matrice est donc $U = \text{diag}(1, -1, -1)$. De même, la matrice de $v$ dans $\mathscr{B}$ est $\text{diag}(-1, 1, -1)$. Deux matrices diagonales commutent et donc $UV = VU$ puis $u \circ v = v \circ u$.
On a montré que si $u$ et $v$ ont les mêmes invariants ou si $u$ et $v$ sont des symétries orthogonales par rapport à des droites orthogonales, alors $u \circ v = v \circ u$.

Finalement, $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

## Exercice 4

**1.** $\dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$. $f$ est continue en $0$. Ensuite,

$$\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{=} \frac{x}{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + o(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

$f$ admet en $0$ un développement limité d'ordre $1$. Donc, $f$ est dérivable en $0$ et de plus $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

**2.**

$$\begin{aligned}
\frac{x}{e^x - 1} &\underset{x \to 0}{=} \frac{x}{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) - 1} \\
&\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)} \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + x^2\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + x^3\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + x^4\left(-\frac{1}{120} + \frac{1}{36} + \frac{1}{24} - 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2} \times \frac{x}{1!} + \frac{1}{6} \times \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{30} \times \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Donc, $B_0 = 1$, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, $B_2 = \dfrac{1}{6}$, $B_3 = 0$ et $B_4 = -\dfrac{1}{30}$.

**3.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $x$ non nul,

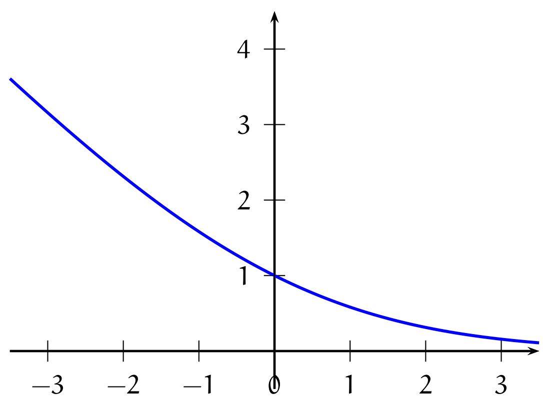
$$f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x(e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-1 + (1-x)e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x)$ est du signe de $-1 + (1-x)e^x$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = -1 + (1-x)e^x$. La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$. Par suite, la fonction $g$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $g(0) = -1 + 1 = 0$, la fonction $g$ est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$. Il en est de même de la fonction $f'$.

En tenant compte de $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, la fonction $f'$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} -x$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} xe^{-x}$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

**Graphe de $f$.**




**4.** La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur $[1, 2]$ et donc I existe. Pour tout $x \in [1, 2]$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

puis

$$I = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx = \left[\ln\left(1 - e^{-x}\right)\right]_1^2 = \ln\left(1 - e^{-2}\right) - \ln\left(1 - e^{-1}\right) = \ln\left(\frac{\left(1 + e^{-1}\right)\left(1 - e^{-1}\right)}{1 - e^{-1}}\right) = \ln\left(1 + e^{-1}\right).$$

## Exercice 5

**1.** Pour tout réel $x$, $1 + x^2 > 0$ et donc $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $f$ est paire. Pour tout réel $x$,

$$f'(x) = 2x\ln\left(1 + x^2\right) + x^2 \times \frac{2x}{1 + x^2} = 2x\left(\ln\left(1 + x^2\right) + \frac{x^2}{1 + x^2}\right).$$

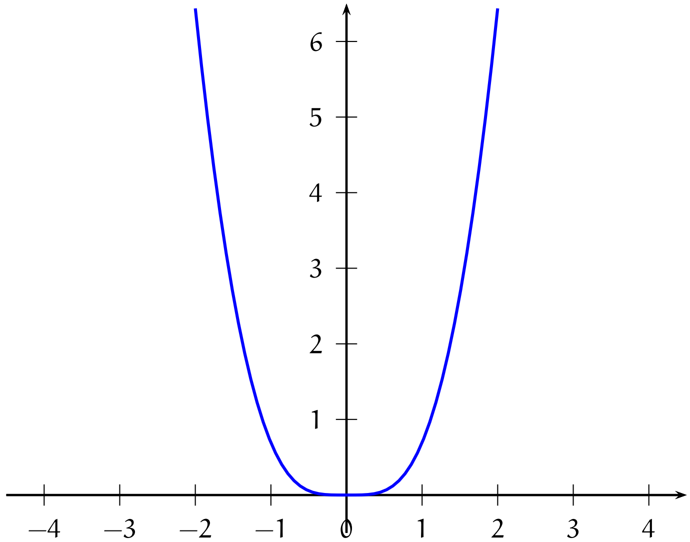
$f'(0) = 0$ et d'autre part, pour tout réel strictement positif $x$, $f'(x)$ est du signe de $\ln\left(1 + x^2\right) + \dfrac{x^2}{1 + x^2}$. Pour tout réel $x$, posons $g(x) = \ln\left(1 + x^2\right) + \dfrac{x^2}{1 + x^2}$. $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{2x\left(1 + x^2\right) - x^2(2x)}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{2x\left(1 + x^2\right) + 2x}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{2x\left(2 + x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}.$$

La fonction $g'$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction $g$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En tenant compte de $g(0) = 0$, la fonction $g$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Mais alors, la fonction $f'$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ puis strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ par parité.

**Graphe de $f$.**

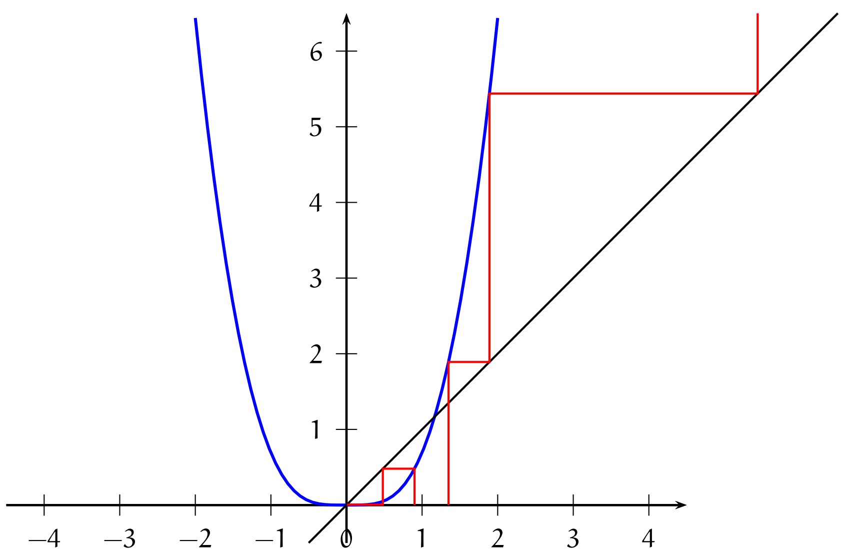


**2.** Soit $u_0 > 0$.

• Montrons par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et est strictement positif.
- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n$ existe et $u_n > 0$. Alors, $u_{n+1} = u_n^2 \ln\left(1 + u_n^2\right)$ existe et est strictement positif.

Le résultat est démontré par récurrence. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et strictement positive.

• Représentons graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Il semble que suivant la position de $u_0$ par rapport à un certain réel $\alpha$ strictement positif, ou bien, la suite $u$ est décroissante de limite nulle, ou bien la suite $u$ est constante, ou bien la suite $u$ est croissante de limite $+\infty$.

• Etudions le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x = x^2 \ln\left(1 + x^2\right) - x$ sur $[0, +\infty[$. Cette fonction s'annule en $0$ et pour $x > 0$, $f(x) - x = x^2 \left(\ln\left(1 + x^2\right) - \dfrac{1}{x}\right)$. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est du signe de $g\ :\ x \mapsto \ln\left(1 + x^2\right) - \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif $x$,

$$g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

$g$ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Ainsi, la fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et donc $g$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[$.

En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée $\alpha$ dans $]0, +\infty[$. La fonction $g$ étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, la fonction $g$ est strictement négative sur $]0, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est strictement négative sur $]0, \alpha[$, strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$ et s'annule en $0$ et en $\alpha$. Enfin, $f(1,16) - 1,16 = -0,01\ldots < 0$ et $f(1,17) - 1,17 = 0,01\ldots > 0$. Donc, $1,16 < \alpha < 1,17$.

• Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel $\ell$ positif ou nul (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$) vérifiant $f(\ell) = \ell$ (par continuité de $f$ sur $[0, +\infty[$) et donc $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

• Etudions alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**1er cas.** Si $u_0 = \alpha$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, convergente, de limite $\alpha$.

**2ème cas.** Supposons $u_0 \in ]0, \alpha[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \alpha$.
- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Si $0 < u_n < \alpha$, alors $f(0) < f(u_n) < f(\alpha)$ (par stricte croissance de $f$ sur $]0, +\infty[$) puis $0 < u_{n+1} < \alpha$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0, \alpha[$, $f(u_n) - u_n < 0$ et donc $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0, u_0] \subset [0, \alpha[$ et donc $\ell = 0$.

**3ème cas.** Supposons $u_0 \in ]\alpha, +\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$.
- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Si $u_n > \alpha$, alors $f(u_n) > f(\alpha)$ puis $u_{n+1} > \alpha$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]\alpha, +\infty[$, $f(u_n) - u_n > 0$ puis $u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel $\ell \geqslant u_0 > \alpha$. Ceci est impossible et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

En résumé,
- si $u_0 \in ]0, \alpha[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, convergente, de limite nulle.
- si $u_0 = \alpha$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, convergente, de limite $\alpha$.
- si $u_0 \in ]\alpha, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, divergente, de limite $+\infty$.

**3.** $f$ est continue sur $[0, 1]$ et donc I existe. Les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et $x \mapsto \ln\left(1 + x^2\right)$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2 \ln\left(1 + x^2\right)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln\left(1 + x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \times \frac{2x}{1 + x^2}\, dx \\ &= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1 + x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1 + x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x^4 + x^2 - x^2 - 1 + 1}{1 + x^2}\, dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1 + x^2}\right)\, dx = \frac{1}{3} - 1 + \mathrm{Arctan}(1) = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Finalement,

$$I = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8\ln(2)}{3} + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}.$$

# Exercice 6

**1.** La somme d'une série entière est de classe $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Pour tout réel $x \in ]0, 1[$,

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

En dérivant, on obtient pour tout réel $x \in ]0,1[$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En redérivant, on obtient pour tout réel $x \in ]0,1[$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Mais alors, pour tout réel $x \in ]0,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^{k-1} &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = x\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x+1-x}{(1-x)^3} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

**2.** Soit $n$ un entier naturel non nul. La dérivée $(n-1)$-ème sur $]0,1[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$. Par suite, pour tout réel $x \in ]0,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^n} &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-(n-1))!}x^{k-(n-1)} = \sum_{k=n-1}^{+\infty} C_k^{n-1}x^{k-(n-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n-1}^{n-1}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n-1}^{(k+n-1)-(n-1)}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n-1}^{k}x^k.\end{aligned}$$

Donc, pour tout réel $x \in ]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n-1}^{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$ (ce développement est en fait valable sur $]-1,1[$.)