ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier l'approximation de solutions d'équations différentielles par des suites numériques.

Partie I

Soit x_0 un réel fixé, et $T > 0$ un réel strictement positif.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'(t) = -2y(t)$$
en la variable $y : [0, T] \to \mathbb{R}$, partant de la condition initiale $y(0) = x_0$.

2. Soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Résoudre l'équation différentielle
$$y'(t) = -2y(t) + h(t) \tag{1}$$
en la variable $y : [0, T] \to \mathbb{R}$, partant de la condition initiale $y(0) = x_0$.

3. Montrer que la solution y de l'équation différentielle (1) est de classe $\mathcal{C}^1(]0, T[; \mathbb{R})$.

4. Montrer que la dérivée y' de la solution y de l'équation différentielle (1) est une fonction bornée.

5. Soit
$$F : \begin{array}{ccc} [0,T]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & F(t,x) \end{array}$$
une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que toutes ses dérivées partielles soient bornées. Montrer que la fonction F est globalement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, pour tous $y, z \in \mathbb{R}$
$$|F(t,y) - F(t,z)| \leq M|y-z|.$$

6. Rappeler pourquoi il existe une unique solution à l'équation différentielle ordinaire suivante
$$y'(t) = F(t, y(t)) \tag{2}$$
partant de la condition initiale $y(0) = x_0$.

7. Montrer que la solution y de l'équation différentielle (5) est de classe $\mathcal{C}^2(]0,T[;\mathbb{R})$.

8. Soit $z : [0,T] \to \mathbb{R}$ la fonction continue vérifiant l'équation intégrale suivante pour tout $t \in [0,T]$
$$z(t) = x_0 + \int_0^t F(s, z(s))\mathrm{d}s. \tag{3}$$
Montrer que la fonction z est de classe $\mathcal{C}^1(]0,T[;\mathbb{R})$.

9. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, il existe un réel $a \in [0,T]$ (dépendant de t) tel que
$$\int_0^t F(s, z(s)) = F(a, z(a)) \times t.$$

10. Montrer que pour tous $s, t \in [0,T]$, on a le développement limité suivant pour y la solution de l'équation différentielle (5)
$$y(t) = y(s) + F(s,y(s))(t-s) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s,y(s)) + \frac{\partial F}{\partial x}(s,y(s))F(s,y(s))\right)\frac{(t-s)^2}{2} + O((t-s)^2)$$
où $O((t-s)^2)$ est une fonction telle que $\dfrac{O((t-s)^2)}{(t-s)^2}$est bornée quand $s \to t$.

Partie II

On considère une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ notée
$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & F(t,x) \end{array}$$

On suppose dans cette partie qu'il existe une constante $M > 0$ telle que les dérivées partielles de la fonction F sont bornées par cette constante, c'est-à-dire

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\right| \leq M \qquad \text{et} \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| \leq M.$$

Soit $T > 0$ un réel strictement positif et N un entier strictement positif avec $h = T/N$. Soit x_0 un réel fixé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n + hF(nh, x_n), \tag{4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Uniquement pour cette question, on suppose que F est une fonction bornée. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \dfrac{x_n}{n+1}$. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

12. La fonction F n'étant plus supposée bornée, on ne peut pas appliquer la question précédente, et on ne sait a priori rien dire sur la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Trouver une fonction F non bornée (mais dont les dérivées partielles sont bornées) telle que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée (on précisera une valeur pour x_0 si besoin).

13. Montrer que $\exp(x) - x - 1$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

14. Soit $L > 0$, soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes positifs, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$0 \leq y_{n+1} \leq (1+L)y_n + b_n.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$y_n \leq y_0 \exp(Ln) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \exp(L(n-1-k)).$$

15. Soit $D > 0$, soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$d_n = \sum_{k=0}^{n-1} Dk\exp(-kD).$$
Montrer qu'il existe une constante $E > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|d_n| \leq E$.

16. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie qu'il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|x_{n+1}| \leq (1+K_1)|x_n| + K_2 n + K_3.$$

17. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n := \exp\left(-\dfrac{MT}{N}\right)^n x_n$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Partie III

Dans cette partie, on continue de considérer la fonction F de la partie II, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, on note y la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$y'(t) = F(t, y(t)) \tag{5}$$

partant de la condition initiale $y(0) = x_0$ sur l'intervalle $[0, T]$

18. Montrer que pour tout $0 < s < t < T$, il existe $\xi \in [s, t]$ tel que
$$y(t) = y(s) + F(s, y(s))(t-s) + y''(\xi)\frac{(t-s)^2}{2}.$$
19. Montrer qu'il existe une constante $Q > 0$ telle que pour tout $0 < s < t < T$,
$$|y(t) - y(s) - F(s, y(s))(t-s)| \leq Q\frac{(t-s)^2}{2}.$$
20. En déduire que pour tout entier $0 \leq n < N$, on a
$$|x_{n+1} - y((n+1)h)| \leq |x_n - y(nh)|(1 + Mh) + Q\frac{h^2}{2},$$
avec M la constante introduite en partie II.

21. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors pour tout entier $0 \leq n < N$, on a
$$|x_{n+1} - y((n+1)h)| \leq |x_n - y(nh)|(1 + \varepsilon) + \varepsilon h.$$
22. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors
$$\sup_{0\leq n\leq N} |x_n - y(nh)| \leq \varepsilon\frac{T}{N}\frac{1-\exp(\varepsilon N)}{1-\exp(\varepsilon)}.$$
23. L'estimation précédente n'admet pas de limite finie quand N tend vers $+\infty$. On va essayer d'améliorer les résultats. Montrer que
$$\sup_{0\leq n\leq N} |x_n - y(nh)| \leq \frac{Qh^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \exp(MkT/N).$$
24. Montrer qu'il existe une constante C et un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors
$$\frac{QT}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp(MkT/N) \leq C.$$
25. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors on a
$$\sup_{0\leq n\leq N} |x_n - y(nh)| \leq \varepsilon.$$
26. Pour N choisi, on pose x'_N le N-ième terme de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite pour ce choix de N. Montrer que la limite de x'_N quand $N \to +\infty$ est $y(T)$.

2 Problème d'algèbre

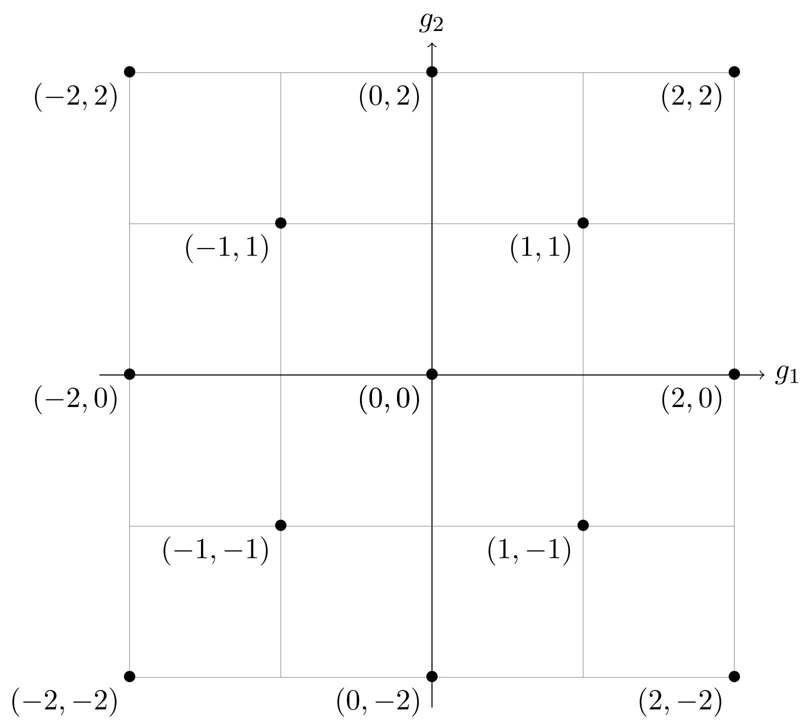
Dans ce problème, on considère des sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$, et certains maillages générés par des bases d'éléments. On cherche notamment à caractériser les morphismes de ces maillages.

Partie I

On pose $G = \{g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2 : g_1+g_2 = 0 \text{ [mod 2]}\}$. On rappelle que la notation [mod 2] dans l'expression $g_1+g_2 = 0$ [mod 2] signifie que 2 divise l'entier g_1+g_2. Notamment si $g_1+g_2 = 1$ [mod 2] c'est que 2 ne divise pas l'entier $g_1 + g_2$. Plus simplement on pourrait écrire

$$G = \{g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2 : g_1 + g_2 \text{ est un entier pair}\}$$

qui est l'ensemble composé de couple de coordonnées cartésiennes entières telles que leur somme soit paire. Une représentation schématique de cet ensemble est donnée ci-dessous.



Pour élément $g = (g_1, g_2)$ et $h = (h_1, h_2) \in G$, on note $g + h$ le couple $(g_1 + h_1, g_2 + h_2)$.
Pour élément $g = (g_1, g_2)$ et $h = (h_1, h_2) \in G$, on note $g \star h$ le couple (g_1h_1, g_2h_2).
Pour tout élément $n \in \mathbb{Z}$, et tout élément $g = (g_1, g_2) \in G$, on note $n \cdot g$ le couple (ng_1, ng_2).

1. Montrer que $(G, +)$ est un groupe.

2. Montrer que pour tout élément $n \in \mathbb{Z}$, et tout élément $g = (g_1, g_2) \in G$, alors $n \cdot g$ est dans G.

3. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
est inversible.

4. En déduire qu'il existe deux éléments u et $v \in G$ tel que pour tout $g \in G$, il existe m et $n \in \mathbb{Z}$ tels que
$$g = mu + nv.$$

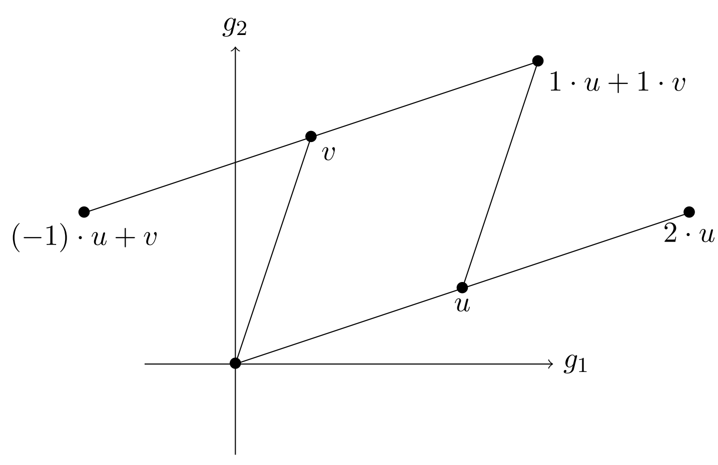
5. Montrer que $(G, +, \star)$ est un anneau commutatif.

6. Montrer que G possède un sous-anneau non trivial, c'est-à-dire qu'il existe un sous-anneau H tel que $(0,0) \subsetneq H \subsetneq G$.

Partie II

On rappelle qu'un idéal I d'un anneau commutatif G est un sous-groupe additif tel que
$$\forall g \in G, \quad \forall i \in I, \quad g \star i \in I.$$

Pour $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux éléments de G (i.e. $u_1 + u_2 = 0$ [mod 2] et $v_1 + v_2 = 0$ [mod 2]), on note
$$I[u] := \{g \in G : \text{ Il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } g = m \cdot u\}$$
et
$$I[u, v] = \{g \in G : \text{ Il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } g = m \cdot u + n \cdot v\}$$
deux sous-ensembles particuliers de G qu'on se propose d'étudier. Une représentation schématique de $I[u]$ et $I[u, v]$ est donnée ci-dessous.



7. Vérifier que $I[u]$ et $I[u, v]$ sont bien des sous-ensembles de G.

8. Montrer que l'ensemble $I[u]$ est un sous-groupe additif de G.

9. Montrer que l'ensemble $I[u,v]$ est un sous-groupe additif de G.

10. Trouver un élément $u \in G$ tel que $I[u]$ ne soit pas un sous-anneau de G.

11. Montrer que l'ensemble $I[u]$ est un idéal si et seulement si $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$.

12. Soient u et v deux éléments de G non colinéaires, c'est-à-dire que si $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ alors $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$. On suppose que $1/(u_1v_2 - u_2v_1) \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $I[u,v]$ est un sous-anneau de G.

13. Sous les mêmes conditions que la question précédente, montrer que $I[u,v]$ est un idéal de G.

14. Soient u et v deux éléments de G tels que $(u_1v_2 - u_2v_1) = 2$. Montrer que l'ensemble $I[u,v]$ est un sous-anneau de G.

15. Sous les mêmes conditions que la question précédente, montrer que $I[u,v]$ est un idéal de G.

Partie III

Dans cette partie, on considère deux éléments fixés $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ de G tels que $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, et on considère encore le sous-groupe additif

$$I[u,v] = \{g \in G : \text{ Il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } g = m \cdot u + n \cdot v\}.$$

On note GL_2 le groupe de transformations linéaires inversibles de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$GL_2 := \left\{ P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

et on note O_2 le groupe de transformations orthogonales de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$O_2 := \left\{ P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2 : PP^T = P^T P = Id \right\}$$

où P^T est la matrice transposée de P et Id est la matrice identité. Pour un élément P de GL_2 ou de O_2, et un élément $g \in G$ on note Pg le couple $(ag_1 + bg_2, cg_1 + dg_2) \in \mathbb{R}^2$.

16. Vérifier que GL_2 forme un groupe pour la loi de multiplication.

17. Vérifier que O_2 est un sous-groupe de GL_2 pour la loi de multiplication.

18. On note $Aut(I[u,v])$ l'ensemble des matrices P de O_2 tels que pour tout $g \in I[u,v]$, on a Pg et $P^T g$ qui sont encore dans $I[u,v]$. Soit $P \in Aut(I[u,v])$, montrer que l'application $\mathcal{P}$ suivante est un morphisme de groupe additif de $I[u,v]$.

$$\mathcal{P}: \begin{array}{rcl} I[u,v] & \to & I[u,v] \\ g = m \cdot u + n \cdot v & \mapsto & \mathcal{P}(g) = Pg \end{array}$$

On identifiera donc la matrice P avec l'application $\mathcal{P}$ dans le reste du problème.

19. Montrer que l'ensemble $Aut(I[u,v])$ est un sous-groupe de O_2 pour la loi de multiplication.

20. Montrer que pour tout $P \in Aut(I[u,v])$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ ou } P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

21. Soit $P \in Aut(I[u,v])$, en montrant que $P^{-1}u + Pu$ est un élément de $I[u,v]$, en déduire que la trace de P est un entier.

22. Soit P un élément de $Aut(I[u,v])$ de déterminant 1. Montrer qu'il existe au maximum 8 valeurs possibles dans $]-\pi,\pi]$ pour α dans l'écriture proposée en question 20, précisément que seuls les angles $\left\{0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ sont autorisés.

23. Supposons qu'il existe un élément $P \in Aut(I[u,v])$ de déterminant égal à 1, tel que $Tr(P) = 1$. Montrer qu'il existe une contradiction.

24. Montrer que pour tout $u, v \in G$, les angles 0 et π sont autorisés, c'est-à-dire que les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont des éléments de $Aut(I[u,v])$.

25. Montrer qu'il existe deux éléments $u, v \in G$, tels que la rotation d'angle $\pi/2$ n'est pas autorisée comme transformation préservant $I[u,v]$.

26. Soit $g \in I[u,v]$ non nul, montrer que

$$\max(|g_1 v_2 - g_2 v_1|, |g_1 u_2 - g_2 u_1|) \geq u_1 v_2 - u_2 v_1$$

27. Montrer qu'il existe ε tel que la norme $\|g\| := \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ de tout élément $g \in I[u,v]$ non nul vérifie $\|g\| > \varepsilon$.

28. Soit $\delta = \min\{\|g\| \in \mathbb{R} : g \in I[u,v], g \neq 0\}$. Montrer qu'il existe un nombre fini d'éléments qui soient de norme δ.

29. Conclure qu'il existe un nombre pair d'éléments de norme minimale non nulle.