SESSION 2022

CAPESA

PREMIERE COMPOSITION

I Problème d'analyse

Partie I

1. Notons (E_H) l'équation différentielle proposée. Soit f une fonction dérivable sur $[0,T]$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E_H) \text{ sur } [0,T] &\Leftrightarrow \forall t\in[0,T],\ f'(t)+2f(t)=0 \Leftrightarrow \forall t\in[0,T],\ e^{2t}f'(t)+2e^{2t}f(t)=0\\
&\Leftrightarrow \forall t\in[0,T],\ \left(e^{2t}f\right)'(t)=0 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in[0,T],\ e^{2t}f(t)=\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in[0,T],\ f(t)=\lambda e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E_H) sur $[0,T]$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto \lambda e^{-2t}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Soit f une telle fonction. Soit x_0 un réel. $f(0)=x_0\Leftrightarrow \lambda=x_0$. La solution de (E_H) sur $[0,T]$ prenant la valeur x_0 en 0 est la fonction $t\mapsto x_0e^{-2t}$.

2. Notons (E) l'équation différentielle proposée. La fonction h est continue sur $[0,T]$. Les solutions de (E) sur $[0,T]$ constituent donc un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur $[0,T]$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } [0,T] &\Leftrightarrow \forall t\in[0,T],\ f'(t)+2f(t)=h(t) \Leftrightarrow \forall t\in[0,T],\ e^{2t}f'(t)+2e^{2t}f(t)=e^{2t}h(t)\\
&\Leftrightarrow \forall t\in[0,T],\ \left(e^{2t}f\right)'(t)=e^{2t}h(t)\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in[0,T],\ e^{2t}f(t)=\lambda+\int_0^t e^{2u}h(u)\,du\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in[0,T],\ f(t)=\lambda e^{-2t}+e^{-2t}\int_0^t e^{2u}h(u)\,du.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $[0,T]$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto \lambda e^{-2t}+e^{-2t}\displaystyle\int_0^t e^{2u}h(u)\,du$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Soit f une telle fonction. Soit x_0 un réel. $f(0)=x_0\Leftrightarrow\lambda=x_0$. La solution de (E) sur $[0,T]$ prenant la valeur x_0 en 0 est la fonction $t\mapsto x_0e^{-2t}+e^{-2t}\displaystyle\int_0^t e^{2u}h(u)\,du$.

3. Soit f la solution de (1) sur $[0,T]$. f est dérivable sur $[0,T]$ et $f'=-2f+h$. Mais alors, f est continue sur $[0,T]$ puis $-2f+h$ est continue sur $[0,T]$ et donc f' est continue sur $[0,T]$. Finalement, $f\in C^1([0,T],\mathbb{R})$. En particulier, $f\in C^1(]0,T[,\mathbb{R})$.

4. La fonction f' est continue sur le segment $[0,T]$ et en particulier, la fonction f' est bornée sur le segment $[0,T]$.

5. Soit M un majorant de $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. Soit $t\in[0,T]$. Soit $(y,z)\in\mathbb{R}^2$.
La fonction $g\ :\ w\mapsto F(t,w)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe un réel c tel que $g(y)-g(z)=(y-z)g'(c)=(y-z)\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,c)$. Mais alors,

$$|F(t,y)-F(t,z)|=|g(y)-g(z)|=|y-z|\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,c)\right|\leqslant M|y-z|.$$

On a montré qu'il existe $M\geqslant 0$ tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $(y,z)\in\mathbb{R}^2$, $|F(t,y)-F(t,z)|\leqslant M|y-z|$ (M ne dépend ni de y, ni de z, ni de t).

6. La fonction F est continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ et est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. Malheureusemnt, $[0,T]\times\mathbb{R}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz ne peut pas s'appliquer.

7. On suppose néanmoins que l'équation (2) admet une unique solution maximale vérifiant de plus $y(0) = x_0$. Soit y cette solution.
La fonction $t \mapsto y(t)$ est en particulier continue sur $[0, T]$ puis la fonction $t \mapsto (t, y(t))$ est continue sur $[0, T]$ à valeurs dans $[0, T] \times \mathbb{R}$ puis la fonction $t \mapsto F(t, y(t))$ est continue sur $[0, T]$ et finalement la fonction y' est continue sur $[0, T]$ ou encore y est de classe C^1 sur $[0, T]$.

Par le même raisonnement, la fonction $t \mapsto F(t, y(t))$ est de classe C^1 sur $[0, T]$ puis la fonction y' est de classe C^1 sur $[0, T]$ et donc la fonction y est de classe C^2 sur $[0, T]$.

8. La fonction $t \mapsto F(t, z(t))$ est continue sur $[0, T]$. Donc, la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t F(s, z(s))\, ds$ est de classe C^1 sur $[0, T]$. Il en est de même de la fonction z.

9. Pour $t \in [0, T]$, posons $g(t) = F(t, z(t))$. Soit $t \in [0, T]$, La fonction $g : s \mapsto F(s, z(s))$ est continue sur le segment $[0, t]$. D'après le théorème de la moyenne, il existe $a \in [0, T]$ (dépendant de t) tel que

$$\int_0^t F(s, z(s))\, ds = \int_0^t g(s)\, ds = g(a) \times (t - 0) = F(a, z(a)) \times t.$$

10. On sait que la solution y du problème de Cauchy (2) vérifie l'équation intégrale (3) (s'obtient en intégrant les deux membres de (2) de 0 à t).

Soit $s \in [0, T]$ fixé. Pour tout réel $t \in [0, T]$, $z(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t F(u, z(u))\, du$. La fonction z est de classe C^2 sur $[0, T]$ et en particulier est deux fois dérivable en s (éventuellement dérivable seulement à droite ou à gauche suivant que $s = 0$ ou $s = T$). On en déduit que la fonction y admet en s un développement limité d'ordre 2, son développement de Taylor-Yonug.

Pour tout réel $t \in [0, T]$, $y(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t F(u, y(u))\, du$ puis $y'(t) = F(t, y(t))$. Ensuite, d'après la règle de la chaîne, pour tout réel $t_0 \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} y''(t_0) &= 1 \times \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, y(t_0)) + y'(t_0) \times \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, y(t_0)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, y(t_0)) + F(t_0, y(t_0)) \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, y(t_0)). \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} y(t) &\underset{t \to s}{=} y(s) + y'(s)(t - s) + y''(s)\frac{(t - s)^2}{2} + o\left((t - s)^2\right) \\ &\underset{t \to s}{=} y(s) + F(s, y(s))(t - s) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, y(t)) + F(t, y(t)) \frac{\partial F}{\partial x}(t, y(t))\right) \frac{(t - s)^2}{2} + O\left((t - s)^2\right). \end{aligned}$$

car la fonction $t \mapsto \dfrac{o\left((t - s)^2\right)}{(t - s)^2}$ tend vers 0 quand t tend vers s et est en particulier bornée sur un voisinage de s.

Partie II

11. Soit M_0 un majorant de la fonction $|F|$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_0 + h \sum_{k=0}^{n-1} F(kh, x_k)$$

puis

$$|x_n| \leqslant |x_0| + h \sum_{k=0}^{n-1} |F(kh, x_k)| \leqslant |x_0| + nhM_0 \leqslant (|x_0| + hM_0) + n(|x_0| + hM_0) = (n + 1)(|x_0| + hM_0).$$

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|A_n| \leqslant |x_0| + hM_0$, ce qui reste vrai quand $n = 0$ (car $A_0 = x_0$).

12. Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, posons $F(t,x) = x$. La fonction F n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mais ses deux dérivées partielles (à savoir $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0$ et $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = 1$) sont bornées sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + hx_n = (1+h)x_n$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (1+h)^n x_0$ puis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \frac{(1+h)^n}{n+1}.$$

Puisque $1+h > 0$, un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$. Pour ce choix de fonction F, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

13. Pour $x \geqslant 0$, posons $f(x) = e^x - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée la fonction $f' : x \mapsto e^x - 1$. La fonction f' est positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par suite, si $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$ ou encore $e^x - x - 1 \geqslant 0$. On a montré que

$$\forall x \geqslant 0,\ e^x \geqslant 1 + x.$$

14. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \leqslant y_0 e^{Ln} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{L(n-1-k)}$.

- $y_1 \leqslant (1+L)y_0 + b_0 \leqslant e^L y_0 + e^0 b_0$ (car $y_0 \geqslant 0$ et d'après la question précédente). Le résultat est donc vrai quand $n = 1$

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $y_n \leqslant y_0 e^{Ln} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{L(n-1-k)}$. Alors,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &\leqslant (1+L)y_n + b_n \\
&\leqslant y_0(1+L)e^{Ln} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k(1+L)e^{L(n-1-k)}\right) + b_n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant y_0 e^L e^{Ln} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k e^L e^{L(n-1-k)}\right) + b_n \\
&\text{(d'après la question précédente et car } y_0 \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k \geqslant 0) \\
&= y_0 e^{L(n+1)} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{L(n-k)}\right) + e^0 b_n \\
&= y_0 e^{L(n+1)} + \sum_{k=0}^{n} b_k e^{L(n-k)}.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

15. Puisque $D > 0$, un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $Dk^3 e^{-kD} \underset{k\to+\infty}{=} o(1)$ et donc que $Dke^{-kD} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. Mais alors la série de terme général Dke^{-kD}, $k \in \mathbb{N}$, converge ou encore la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En particulier, la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et il existe donc un réel $E > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|d_n| \leqslant E$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|x_{n+1}| = |x_n + hF(nh, x_n)| \leqslant |x_n| + h\,|F(nh, x_n)|\,.$$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (dépendant de t_0 et x_0) tel que

$$F(t_0, x_0) - F(0,0) = F(t_0, x_0) - F(0, x_0) + F(0, x_0) - F(0,0) = (t_0 - 0)\frac{\partial F}{\partial t}(c, x_0) + (x_0 - 0)\frac{\partial F}{\partial x}(0, d).$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}|F(t_0,x_0)| &= \left|F(0,0)+t_0\frac{\partial F}{\partial t}(c,x_0)+x_0\frac{\partial F}{\partial x}(0,d)\right| \\ &\leqslant |F(0,0)|+t_0\left|\frac{\partial F}{\partial t}(c,x_0)\right|+|x_0|\left|\frac{\partial F}{\partial x}(0,d)\right| \\ &\leqslant |F(0,0)|+Mt_0+M|x_0|.\end{aligned}$$

On revient alors à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}|x_{n+1}| &\leqslant |x_n|+h|F(nh,x_n)| \\ &\leqslant |x_n|+h(|F(0,0)|+Mnh+M|x_n|)=(1+Mh)|x_n|+h^2Mn+h|F(0,0)|.\end{aligned}$$

Les réels positifs $K_1=1+Mh(>0)$, $K_2=h^2M$ et $K_3=h|F(0,0)|$ conviennent.

17. On applique alors la question 14) à la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $L=K_1=Mh>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=K_2n+K_3$ (la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive). On obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|x_n|\leqslant|x_0|e^{Mhn}+\sum_{k=0}^{n-1}(K_2k+K_3)e^{Mh(n-1-k)},$$

puis

$$\begin{aligned}|X_n| &= e^{-Mhn}|x_n| \\ &\leqslant |x_0|+\sum_{k=0}^{n-1}(K_2k+K_3)e^{Mh(-1-k)}=|x_0|+K_2e^{-Mh}\sum_{k=0}^{n-1}ke^{-Mhk}+K_3e^{-Mh}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-Mhk} \\ &\leqslant |x_0|+K_2e^{-Mh}\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-Mhk}+K_3e^{-Mh}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-Mhk}.\end{aligned}$$

Puisque $Mh>0$, la série de terme général ke^{-Mhk} converge d'après la question précédente et d'autre part, la série de terme général e^{-Mhk} converge (car par exemple, $e^{-Mhk}\underset{k\to+\infty}{=}o\left(ke^{-Mhk}\right)$). Donc, $K=|x_0|+K_2e^{-Mh}\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-Mhk}+K_3e^{-Mh}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-Mhk}$ est un réel tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|X_n|\leqslant K$.

On a montré que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Partie III

18. Soient s et t deux réels tels que $0<s<t<T$. D'après la question 7), la fonction y est deux fois dérivable sur $[0,T]$. En particulier, la fonction y est de classe C^1 sur $[s,t]$ et deux fois dérivable sur $]s,t[$. D'après l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe $\xi\in]s,t[$ tel que

$$y(t)=y(s)+y'(s)(t-s)+y''(\xi)\frac{(t-s)^2}{2}.$$

Puisque $y'(s)=F(s,y(s))$, cette égalité s'écrit encore

$$y(t)=y(s)+F(s,y(s))(t-s)+y''(\xi)\frac{(t-s)^2}{2}.$$

19. D'après la règle de la chaîne, $y''(s)=\frac{d}{ds}(F(s,y(s)))=\frac{\partial F}{\partial t}(s,y(s))+y'(s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,y(s))=\frac{\partial F}{\partial t}(s,y(s))+F(s,y(s))\frac{\partial F}{\partial x}(s,y(s))$.

Les fonctions $u\mapsto\frac{\partial F}{\partial t}(u,y(u))$ et $u\mapsto\frac{\partial F}{\partial x}(u,y(u))$ sont par hypothèse bornées sur le segment $[0,T]$. D'autre part, la fonction $u\mapsto F(u,y(u))$ est continue sur le segment $[0,T]$ et en particulier bornée sur ce segment. On en déduit que la fonction $u\mapsto\frac{\partial F}{\partial t}(u,y(u))+F(u,y(u))\frac{\partial F}{\partial x}(u,y(u))$ est bornée sur le segment $[0,T]$.

Soit $Q > 0$ un majorant de la valeur absolue de cette fonction sur $[0, T]$ (Q est donc indépendant de s et de t). Alors,

$$|y(t) - y(s) - F(s, y(s))(t - s)| = |y''(\xi)| \frac{(t-s)^2}{2} \leqslant Q\frac{(t-s)^2}{2}.$$

20. Soit n un entier naturel tel que $0 \leqslant n < N$. Alors, $0 \leqslant nh \leqslant (n+1)h = \dfrac{(n+1)T}{N} \leqslant \dfrac{NT}{N} = T$ puis

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - y((n+1)h)| &= [x_n + hF(nh, x_n) - y_{n+1}(h)| \\ &= |(x_n - y(nh)) - (y((n+1)h) - y(nh) - hF(nh, y(nh))) + h(F(nh, y(nh)) - F(nh, x_n))| \\ &\leqslant |x_n - y(nh)| + |y((n+1)h) - y(nh) + ((n+1)h - nh)F(nh, y(nh)))| \\ &+ h|F(nh, y(nh)) - F(nh, x_n)| \\ &\leqslant |x_n - y(nh)| + h|F(nh, y(nh)) - F(nh, x_n)| + Q\frac{h^2}{2}.\end{aligned}$$

Enfin, encore une fois, l'inégalité des accroissements finis fournit $h|F(nh, y(nh)) - F(nh, x_n)| \leqslant Mh|x_n - y(nh)|$. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - y((n+1)h)| \leqslant (1 + Mh)|x_n - y(nh)| + Q\frac{h^2}{2}.$$

21. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $h = h_N = \dfrac{T}{N}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} Mh = 0$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{Qh}{2} = 0$. On choisit alors un rang $N^\star$ tel que pour $N > N^*$, $Mh \leqslant \varepsilon$ et $0 \leqslant \dfrac{Qh}{2} \leqslant \varepsilon$.

Soit $N > N^\star$. Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n < N$, on a

$$|x_{n+1} - y((n+1)h)| \leqslant (1 + Mh)|x_n - y(nh)| + Q\frac{h^2}{2} \leqslant (1+\varepsilon)|x_n - y(nh)| + \varepsilon h.$$

22. Soient $N > N^*$ puis $n \in [\![1, N]\!]$. D'après la question 14) (qui s'applique jusqu'au rang N avec $L = \varepsilon$ et pour tout k, $b_k = h\varepsilon$)

$$\begin{aligned}|x_n - y(nh)|| &\leqslant |x_0 - y(0)|e^{\varepsilon h} + \sum_{k=0}^{n-1} h\varepsilon e^{\varepsilon(n-1-k)} \\ &= h\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} e^{\varepsilon(n-1-k)} \text{ (car } y(0) = x_0) \\ &= \varepsilon\frac{T}{N}\sum_{k'=0}^{n-1} e^{\varepsilon k'} \text{ (en posant } k' = n-1-k) \\ &\leqslant \varepsilon\frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\varepsilon k} = \varepsilon\frac{T}{N}\frac{1-e^{N\varepsilon}}{1-e^{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $|x_n - y(nh)|| \leqslant \varepsilon\dfrac{T}{N}\dfrac{1-e^{N\varepsilon}}{1-e^{\varepsilon}}$ et donc $\sup\limits_{n\in[\![0,N]\!]} |x_n - y(nh)|| \leqslant \varepsilon\dfrac{T}{N}\dfrac{1-e^{N\varepsilon}}{1-e^{\varepsilon}}$.

23. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $|x_n - y(nh)| \leqslant \dfrac{Qh^2}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{Mkh}$.

- Puisque $|x_1 - y(h)| \leqslant (1 + Mh)|x_0 - y(0)] + \dfrac{Qh^2}{2} = \dfrac{Qh^2}{2}$, le résultat est vrai quand $n = 1$.

- Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. Supposons que $|x_n - y(nh)| \leqslant \dfrac{Qh^2}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{Mkh}$. Alors,

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - y((n+1)h)| &\leqslant (1+Mh)\,|x_n - y(nh)| + \frac{Qh^2}{2} \\
&\leqslant \frac{Qh^2}{2}\left((1+Mh)\sum_{k=0}^{n-1} e^{Mkh} + 1\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant \frac{Qh^2}{2}\left(1 + e^{Mh}\sum_{k=0}^{n-1} e^{Mkh}\right) \text{ (d'après la question 13)} \\
&= \frac{Qh^2}{2}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{M(k+1)h}\right) = \frac{Qh^2}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{Mkh}\right) \\
&= \frac{Qh^2}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{Mkh}.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Mais alors, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $|x_n - y(nh)| \leqslant \dfrac{Qh^2}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{Mkh} \leqslant \dfrac{Qh^2}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} e^{Mkh}$. Cette dernière inégalité reste vraie pour $n = 0$ car $|x_0 - y(0)| = 0$ et finalement,

$$\sup_{n \in [\![0,N]\!]} |x_n - y(nh)| \leqslant \frac{Qh^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1} e^{Mkh}.$$

24. Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{QT}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{MkT}{N}} &= \frac{Qh}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{Mh}\right)^k = \frac{Qh}{2}\frac{1 - e^{MNh}}{1 - e^{Mh}} \\
&= \frac{Q}{2} \times \frac{T}{N} \times \frac{e^{MT} - 1}{e^{\frac{MT}{N}} - 1},
\end{aligned}$$

puis (en tenant compte de $MT > 0$)

$$\frac{QT}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{MkT}{N}} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{QT\left(e^{MT} - 1\right)}{2} \times \frac{1}{N \times \dfrac{MT}{N}} = \frac{Q\left(e^{MT} - 1\right)}{2M}.$$

Mais alors, il existe $N^\star \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $N > N^\star$, $\dfrac{QT}{2N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{MkT}{N}} \leqslant \dfrac{Q\left(e^{MT} - 1\right)}{2M} + \dfrac{Q\left(e^{MT} - 1\right)}{2M} = \dfrac{Q\left(e^{MT} - 1\right)}{M}$.

Il existe donc un entier naturel non nul $N^\star$ puis un réel strictement positif C (à savoir $C = \dfrac{Q\left(e^{MT} - 1\right)}{M}$) tels que pour tout $N > N^\star$,

$$\frac{QT}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{MkT}{N}} \leqslant C.$$

25. Soit $\varepsilon > 0$. On note $N_0^\star$ l'entier N^* de la question précédente. Pour $N > N_0^\star$,

$$\sup_{n \in [\![0,N]\!]} |x_n - y(nh)| \leqslant \frac{Qh^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1} e^{Mkh} = \frac{T}{N} \times \frac{QT}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{Mkh} \leqslant \frac{CT}{N}.$$

Maintenant, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{CT}{N} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sup_{n \in [\![0,N]\!]} |x_n - y(nh)| = 0$. Par suite, il existe un entier naturel non nul $N^\star$ tel que pour $N > N^\star$, $\displaystyle\sup_{n \in [\![0,N]\!]} |x_n - y(nh)| \leqslant \varepsilon$.

26. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N^\star \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $N > N^\star$, $\sup\limits_{n \in [\![0,N]\!]} |x_n - y(nh)| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour $N > N^\star$, $|x'_N - y(T)| = |x'_N - y(Nh)| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N^\star \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $N > N^\star$, $|x'_N - y(T)| \leqslant \varepsilon$, et donc

$$\lim_{N \to +\infty} x'_N = y(T).$$

II Problème d'algèbre

Partie I

1. Vérifions que G est un sous-groupe de $\left(\mathbb{Z}^2, +\right)$.

• $0 + 0 = 0 \equiv 0$ [2] et donc $(0, 0) \in G$.

• Soit $((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \in G^2$. $(g_1, g_2) - (h_1, h_2) = (g_1 - h_1, g_2 - h_2)$. De plus, modulo 2,

$$(g_1 - h_1) + (g_2 - h_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2) \equiv 0 - 0 \equiv 0.$$

Donc, $(g_1, g_2) - (h_1, h_2) \in G$.

En résumé, $(0, 0) \in G$ et pour tout $((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \in G^2$, $(g_1, g_2) - (h_1, h_2) \in G$. Ceci montre que G est un sous-groupe de $\left(\mathbb{Z}^2, +\right)$ et donc $(G, +)$ est un groupe.

2. Soit $g = (g_1, g_2) \in G$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n.g \in G$.

- $0.g = (0 \times g_1, 0 \times g_2) = (0, 0) \in G$. Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $n.g \in G$. Alors

$$(n+1).g = ((n+1)g_1, (n+1)g_2) = (ng_1, ng_2) + (g_1, g_2) = n.g + g \in G$$

car $(G, +)$ est un groupe.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n.g \in G$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z}^-$. Alors $-n \in \mathbb{N}$ et donc $(-n).g \in G$ puis $n.g = -(-n).g \in G$.

On a montré que pour tout $g \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $n.g \in G$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(M) = -2 \neq 0$ et donc M est inversible. L'inverse de M est $M^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}M$.

4. Soient $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$. Tout d'abord, pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $mu + nv = m(1, 1) + n(1, -1) = (m + n, m - n)$. $m + n$ et $m - n$ sont deux entiers relatifs et de plus, $(m + n) + (m - n) = 2m \equiv 0$ [2]. Donc, $mu + nv \in G$. Ceci montre que

$$\left\{mu + nv,\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2\right\} \subset G.$$

Inversement, soit $g = (g_1, g_2) \in G$. Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned} g = mu + nv &\Leftrightarrow (m + n, m - n) = (g_1, g_2) \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (m, n) = \frac{1}{2}(g_1 + g_2, g_1 - g_2) \\ &\Leftrightarrow m = \frac{g_1 + g_2}{2} \text{ et } n = \frac{g_1 - g_2}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $g \in G$, $g_1 + g_2 \equiv 0$ [2] et $g_1 - g_2 \equiv g_1 + g_2 \equiv 0$ [2] et donc $\dfrac{g_1 + g_2}{2}$ et $\dfrac{g_1 - g_2}{2}$ sont effectivement des entiers relatifs. On a montré que pour tout $g = (g_1, g_2) \in G$, il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $g = mu + nv$ ou encore

$$G \subset \left\{mu + nv,\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Finalement, $G = \left\{mu + nv,\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ où $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$.

5. On suppose connu le fait que $\left(Z^2,+,\star\right)$ est un anneau commutatif. On sait déjà que $(G,+)$ est un groupe commutatif. Vérifions que G est stable pour $\star$. Soit $((g_1,g_2),(h_1,h_2)) \in G^2$.

$$(g_1,g_2)\star(h_1,h_2) = (g_1h_1, g_2h_2).$$

g_1g_2 et h_1h_2 sont des entiers relatifs et de plus, modulo 2

$$g_1h_1 + g_2h_2 = (g_1+g_2)\,h_1 + (h_2-h_1)\,g_2 \equiv 0\times h_1 + (h_2+h_1)\,g_2 \equiv 0\times g_2 \equiv 0.$$

Donc, $(g_1,g_2)\star(h_1,h_2) \in G$. Ceci montre que G est stable pour $\star$. On note enfin que $(1,1)$, l'élément neutre de $\mathbb{Z}^2$ pour $\star$, est dans G.

Ainsi,

- $(1,1) \in G$,
- $\forall (g,h) \in G^2,\ g-h \in G$,
- $\forall (g,h) \in G^2,\ g\star h \in G$.

Ceci montre que G est un sous-anneau de l'anneau $\left(\mathbb{Z}^2,+,\star\right)$ et donc $(G,+,\star)$ est un anneau commutatif.

6. On prend toujours $u=(1,1)$. Soit $H = \{m.u,\ m\in\mathbb{Z}\} = \{(m,m),\ m\in\mathbb{Z}\}$. On a $\{(0,0)\} \underset{\neq}{\subset} H \underset{\neq}{\subset} G$.

Ensuite,

- $(1,1) \in H$,
- pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $(m,m)-(n,n) = (m-n,m-n) \in H$,
- pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $(m,m\star(n,n) = (mn,mn) \in H$.

Donc, H est un sous-anneau non trivial de l'anneau $(G,+,\star)$.

Partie II

7. Soit $u=(u_1,u_2)\in G$. Donc, $u_1+u_2\equiv 0$ [2] et $v_1+v_2\equiv 0$ [2]. Soit $m\in\mathbb{Z}$. $mu=(mu_1,mu_2)$ avec $mu_1+mu_2 = m(u_1+u_2)\equiv m\times 0$ [2] ou encore $mu_1+mu_2\equiv 0$ [2] et de même, $mv_1+mv_2\equiv 0$ [2]. Par suite, pour tout $m\in\mathbb{Z}$, $mu\in G$ et donc $I[u]\subset G$.

Puisque $(G,+)$ est un groupe d'après la question 1), pour tout $(u,v)\in G^2$ et pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $mu\in G$ et $nv\in G$ puis $mu+nv\in G$. Donc, $I[u,v]\subset G$.

8. Soit $u=(u_1,u_2)\in G$. On sait déjà que $I[u]\subset G$. $(0,0)=0.u\in I[u]$. Soit alors $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$.

$$mu-nu = ((m-n)u_1,(m-n)u_2)$$

avec $(m-n)u_1+(m-n)u_2 = (m+n)\,(u_1+u_2)\equiv 0$ [2]. Donc, $mu-nu\in I[u]$. On a montré que $I[u]$ est un sous-groupe du groupe $(G,+)$.

Q9. Soit $(u,v)\in G^2$. On sait que la somme de deux sous-groupes du groupe commutatif $(G,+)$ est un sous-groupe du groupe $(G,+)$. Donc, $I[u,v]=I[u]+I[v]$ est un sous-groupe du groupe $(G,+)$.

10. Soit $u=(1,3)\in G$. $u\star u=(1,3)\star(1,3)=(1,9)$. Si $u\star u\in I[u]$, alors il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $1=m\times 1$ et $9=m\times 3$ puis $m=1$ et $m=3$. Ceci est impossible et donc $u\star u\notin I[u]$. Ainsi, pour $u=(1,3)$, $I[u]$ n'est pas stable pour $\star$ et donc $I[u]$ n'est pas un sous-anneau de l'anneau $(G,+,\star)$.

11. Soit $u_1\in 2\mathbb{Z}$ puis $u=(u_1,0)\in G$. On sait déjà que $I[u]$ est un sous-groupe du groupe $(G,+)$. Soit $w=(w_1,w_2)\in G$.

$$u\star w = (u_1,0)\star(w_1,w_2) = (u_1w_1,0) = w_1\,(u_1,0) = w_1.u\in I[u].$$

Donc, si $u_2=0$, $I[u]$ est un idéal de l'anneau $(G,+,\star)$. De même, si $u_1=0$, $I[u]$ est un idéal de l'anneau $(G,+,\star)$.

Réciproquement, soit $u=(u_1,u_2)\in G$ tel que $I[u]$ soit un idéal de l'anneau $(G,+,\star)$. $u\star(2,0)=(2u_1,0)$ doit être dans $I[u]$. Donc, il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $2u_1=mu_1$ et $0=mu_2$. Si $m\neq 0$, alors $u_2=0$ et si $m=0$, alors $u_1=0$. Ainsi, nécessairement $u_1=0$ ou $u_2=0$.

On a montré que $I[u]$ est un idéal de l'anneau $(G,+,\star)$ si et seulement si $u_1=0$ ou $u_2=0$.

12. La condition $\dfrac{1}{u_1v_2-u_2v_1}\in\mathbb{Z}$ équivaut à la condition $u_1v_2-u_2v_1\in\{-1,1\}$ (les inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ sont -1 et 1). On pose $u_1v_2-u_2v_1=\varepsilon$ où $\varepsilon\in\{-1,1\}$. On note que $\dfrac{1}{\varepsilon}=\varepsilon$ car $\varepsilon^2=1$.

On sait déjà que $I[u,v]$ est un sous-groupe du groupe $(G,+)$. Soit $(m,n,m',n')\in\mathbb{Z}^4$.

$$\begin{aligned}(m.u+n.v)\star(m'.u+n'.v)&=(mu_1+nv_1,mu_2+nv_2)\star(m'u_1+n'v_1,m'u_2+n'v_2)\\&=\left((mu_1+nv_1)(m'u_1+n'v_1),(mu_2+nv_2)(m'u_2+n'v_2)\right).\end{aligned}$$

On pose $A=(mu_1+nv_1)(m'u_1+n'v_1)$ et $B=(mu_2+nv_2)(m'u_2+n'v_2)$ (A et B sont en particulier des entiers relatifs). On cherche alors $(m'',n'')\in\mathbb{Z}^2$ tel que $m''u+n''v=(A,B)$ ou encore

$$\left\{\begin{array}{l}m''u_1+n''v_1=A\\m''u_2+n''v_2=B\end{array}\right.\quad(S).$$

Le déterminant du système (S) est $\Delta=u_1v_2-u_2v_1=\varepsilon$. Ce déterminant n'est pas nul et donc le système (S) admet un couple solution et un seul dans $\mathbb{R}^2$. Les formules de CRAMER fournissent

$$m''=\frac{1}{\varepsilon}\begin{vmatrix}A&v_1\\B&v_2\end{vmatrix}=\varepsilon\,(Av_2-Bv_1)$$

et

$$n''=\frac{1}{\varepsilon}\begin{vmatrix}u_1&A\\u_1&B\end{vmatrix}=\varepsilon\,(-Au_2+Bu_2).$$

Mais alors, m'' et n'' sont des entiers relatifs tels que $(m.u+n.v)\star(m'.u+n'.v)=m''u+n''v$. Ceci montre que $I[u,v]$ est stable pour $\star$ et donc $I[u,v]$ est un sous-anneau de l'anneau $(G,+,\star)$.

Remarque. La condition $u_1v_2-u_2v_1\in\{-1,1\}$ ne peut être réalisée car, modulo 2, $u_1v_2-u_2v_1\equiv u_1v_1-u_1v_1\equiv 0$ et donc $u_1v_2-u_2v_1$ est nécessairement un nombre pair.

13. On sait déjà que $I[u,v]$ est un sous-groupe du groupe $(G,+)$. Soient $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ et $w=(w_1,w_2)\in G$.

$$(m.u+n.v)\star w=\left(w_1(mu_1+nv_1),w_2(mu_2+nv_2)\right).$$

On pose de nouveau $A=w_1(mu_1+nv_1)$ et $B=w_2(mu_2+nv_2)$ et on cherche $(m'',n'')\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}m''u_1+n''v_1=A\\m''u_2+n''v_2=B\end{array}\right.\quad(S).$$

Comme à la question précédente, le système (S) admet dans $\mathbb{R}^2$ un couple solution (m'',n'') et un seul et de plus, m'' et n'' sont des entiers relatifs. Donc, $(m.u+n.v)\star w\in I[u,v]$. Ceci montre que $I[u,v]$ est un idéal de l'anneau $(G,+,\star)$.

14. Avec les notations de la question 12), les solutions du système (S) sont $m''=\dfrac{1}{2}(Av_2-Bv_1)$ et $n''=\dfrac{1}{2}(-Au_2+Bu_2)$. Il s'agit alors de vérifier que les nombres m'' et n'' sont des entiers relatifs ce qui équivaut au fait que les nombres Av_2-Bv_1 et $-Au_2+Bu_2$ sont des entiers relatifs pairs.

La condition $u_1+u_2\equiv 0$ [2] s'écrit encore $u_2\equiv -u_1$ [2] ou aussi $u_2\equiv u_1$ [2]. De même, $v_2\equiv v_1$ [2]. Ensuite, $Av_2-Bv_1\equiv(A-B)v_1$ [2] puis

$$\begin{aligned}A-B&=(mu_1+nv_1)(m'u_1+n'v_1)-(mu_2+nv_2)(m'u_2+n'v_2)\\&\equiv(mu_1+nv_1)(m'u_1+n'v_1)-(mu_1+nv_1)(m'u_1+n'v_1)\ [2]\\&\equiv 0\ [2],\end{aligned}$$

puis $(A-B)v_1\equiv 0$ [2] et finalement, Av_2-Bv_1 est un entier relatif pair. On montre de même que $-Au_2+Bu_2$ est un entier pair et donc les réels m'' et n'' obtenus sont des entiers relatifs puis $m''u+n''v\in I[u,v]$. On a montré que $I[u,v]$ est un sous-anneau de l'anneau $(G,+,\star)$.

Remarque. Contrairement à la situation de la question 12), il existe au moins un couple $(u,v)\in G^2$ tel que $u_1v_2-u_2v_1=2$. Par exemple, $u=(1,1)$ et $v=(-1,1)$.

15. Avec les notations de la question 13), le système (S) admet l'unique solution (m'',n'') où $m''=\dfrac{1}{2}(Av_2-Bv_1)$ et $n''=\dfrac{1}{2}(-Au_2+Bu_1)$ avec $A=w_1(mu_1+nv_1)$ et $B=w_2(mu_2+nv_2)$. Ensuite, modulo 2, $B\equiv w_1(mu_1+nv_1)=A$ puis $Av_2-Bv_1\equiv(A-B)v_1\equiv 0$ et $-Au_2+Bu_1\equiv(B-A)u_1\equiv 0$. Donc, m'' et n'' sont effectivement des entiers relatifs et on a de nouveau montré que $I[u,v]$ est un idéal de l'anneau $(G,+,\star)$.

Partie III

16. GL_2 est l'ensemble des inversibles (pour $\times$) de l'anneau $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$. On sait alors que $(\mathsf{GL}_2, \times)$ est un groupe.

17. On note I_2 la matrice unité de format $(2, 2)$. Vérifions que O_2 est un sous-groupe de $(\mathsf{GL}_2, \times)$. Tout d'abord, $\mathsf{O}_2 \subset \mathsf{GL}_2$ (si P est une matrice telle que $\mathsf{PP}^\mathsf{T} = I_2$, P est inversible d'inverse P^T).
Ensuite, $I_2 \times I_2^\mathsf{T} = I_2$ et donc $I_2 \in \mathsf{O}_2$. Soit $(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) \in \mathsf{O}_2^2$.

$$\left(\mathsf{PQ}^{-1}\right)\left(\mathsf{PQ}^{-1}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{PQ}^{-1}\left(\mathsf{Q}^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{PQ}^{-1}\left(\mathsf{Q}^\mathsf{T}\right)^{-1}\mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{P}\left(\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q}\right)^{-1}\mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{P}I_2\mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{PP}^\mathsf{T} = I_2$$

et donc $\mathsf{PQ}^{-1} \in \mathsf{O}_2$ (si P est inversible à droite, d'inverse à droite P^T, alors P est inversible d'inverse P^T). Ceci montre que O_2 est un sous-groupe du groupe $(\mathsf{GL}_2, \times)$.

18. Soit $\mathsf{P} \in \mathrm{Aut}(I[u, v])$. Par définition, $\mathcal{P}(I[u, v]) \subset I[u, v]$ et donc $\mathcal{P}$ est bien une application de $I[u, v]$ dans lui-même.
Soit $(g, g') \in (I[u, v])^2$.

$$\mathcal{P}(g + g') = \mathsf{P} \times (g + g') = \mathsf{P}g + \mathsf{P}g' = \mathcal{P}(g) + \mathcal{P}(g').$$

Donc, $\mathcal{P}$ est un morphisme du groupe additif $(I[u, v], +)$.

19. Tout d'abord, $\mathrm{Aut}(I[u, v]) \subset \mathsf{O}_2$. Ensuite, $I_2 \in \mathrm{Aut}(I[u, v])$ car pour tout $g \in \mathsf{G}$, $I_2 g = g \in \mathsf{G}$ et $I_2^\mathsf{T} g = g \in \mathsf{G}$.
Soit $(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) \in (\mathrm{Aut}(I[u, v]))^2$. Pour tout $g \in I[u, v]$, $\mathsf{Q}^{-1}g = \mathsf{Q}^\mathsf{T}g \in I[u, v]$ puis $\mathsf{PQ}^{-1}g = \mathsf{P}\left(\mathsf{Q}^{-1}g\right) \in I[u, v]$. De même, pour tout $g \in I[u, v]$, $\mathsf{P}^\mathsf{T}g \in I[u, v]$ puis $\left(\mathsf{PQ}^{-1}\right)^\mathsf{T} g = \mathsf{QP}^\mathsf{T}g \in I[u, v]$. Donc, $\mathsf{PQ}^{-1} \in \mathrm{Aut}(I[u, v])$. On a montré que $\mathrm{Aut}(I[u, v])$ est un sous-groupe du groupe $(\mathsf{O}_2, \times)$.

20. On sait que les matrices orthogonales positives sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et les matrices orthogonales négatives sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ou encore, en posant $\alpha' = -\alpha$, les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\alpha') & -\sin(\alpha') \\ -\sin(\alpha') & -\cos(\alpha') \end{pmatrix}$, $\alpha' \in \mathbb{R}$.

Donc, tout élément de $\mathrm{Aut}(I[u, v])$ est de l'un des deux types proposés.

21. Soit $\mathsf{P} \in \mathrm{Aut}(I[u, v])$. Puisque $u \in I[u, v]$, $\mathsf{P}u \in I[u, v]$ et $\mathsf{P}^{-1}u = \mathsf{P}^\mathsf{T}u \in I[u, v]$. Puisque $I[u, v]$ est un sous-groupe du groupe $(\mathsf{G}, +)$, $\mathsf{P}u + \mathsf{P}^{-1}u \in I[u, v]$.

Si $\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Tr}(\mathsf{P}) = 0$ puis $\mathrm{Tr}(\mathsf{P})$ est un entier. Sinon, $\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ puis

$$\mathsf{P} + \mathsf{P}^{-1} = \mathsf{P} + \mathsf{P}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 2\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 2\cos(\alpha) \end{pmatrix} = 2\cos(\alpha)I_2.$$

Mais alors, $\mathsf{P}u + \mathsf{P}^{-1}u = 2\cos(\alpha)u$. Puisque $2\cos(\alpha)u \in I[u, v]$ et donc plus précisément à $I[u]$, on en déduit plus précisément que $2\cos(\alpha)$ est nécessairement un entier puis $\mathrm{Tr}(\mathsf{P})$ est un entier.

On a montré dans tous les cas que la trace de P est un entier.

22. Puisque $\det(\mathsf{P}) = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha), & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Mais alors, $\mathrm{Tr}(\mathsf{P}) = 2\cos(\alpha)$. Puisque $2\cos(\alpha) \in [-2, 2]$ et que $\mathrm{Tr}(\mathsf{P}) \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $2\cos(\alpha) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ puis $\cos(\alpha) \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$ et donc α est nécessairement l'un des huit « angles » 0, $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$, π.

23. Si $\det(\mathsf{P}) = 1$, P est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si de plus $\mathrm{Tr}(\mathsf{P}) = 1$, alors $2\cos(\alpha) = 1$ puis $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.

P est donc nécessairement l'une des deux matrices $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Dans le premier cas, $\mathsf{P}u = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u_1 - u_2\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{u_1\sqrt{3} + u_2}{2} \end{pmatrix}$. Puisque $\mathsf{P}u \in I[u, v]$, les nombres $\dfrac{u_1 - u_2\sqrt{3}}{2}$

et $\dfrac{u_1\sqrt{3}+u_2}{2}$ sont nécessairement des entiers puis les nombres $u_1-u_2\sqrt{3}$ et $u_1\sqrt{3}+u_2$ sont nécessairement des entiers pairs. Mais si $u_2\neq 0$, $u_1-u_2\sqrt{3}$ est irrationnel et en particulier $u_1-u_2\sqrt{3}$ n'est pas un entier. Par suite, $u_2=0$. De même, si $u_1\neq 0$, $u_1\sqrt{3}+u_2$ n'est pas entier et donc $u_1=0$.

Mais alors, $u=(u_1,u_2)=(0,0)$ ce qui est faux. Donc, la matrice $P=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathrm{Aut}(I[u,v])$.

De même, la matrice $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=P^T$ n'appartient pas à $\mathrm{Aut}(I[u,v])$.

24. Soit $(u,v)\in G^2$ tel que $u_1v_2-u_2v_1\neq 0$. D'après la question 19), $I_2\in\mathrm{Aut}(I[u,v])$. En appliquant ce résultat aux vecteurs $-u$ et $-v$, $I_2\in\mathrm{Aut}(I[-u,-v])$ ou encore $-I_2\in\mathrm{Aut}(I[u,v])$.

25. Soient $u=(1,3)$ et $v=(3,1)$. u et v sont deux éléments de G non colinéaires. Ensuite, $P=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ puis

$$Pu=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Si $Pu\in I[u,v]$, il existe $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases}m+3n=-3\\ 3m+n=1\end{cases}$. En additionnant membre à membre, on obtient $4(m+n)=-2$ et donc $m+n=-\dfrac{1}{2}$ ce qui contredit le fait que m et n sont des entiers. Donc, pour ce choix de u et v, la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ n'appartient pas à $\mathrm{Aut}(I[u,v])$.

26. Si $u_1v_2-u_2v_1<0$, c'est immédiat. Dorénavant, $u_1v_2-u_2v_1>0$.

Posons $g=mu+nv$ où $(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$. Donc, $g=(mu_1+nv_1,mu_2+nv_2)$ puis

$$g_1v_2-g_2v_1=(mu_1+nv_1)\,v_2-(mu_2+nv_2)\,v_1=m\,(u_1v_2-u_2v_1)$$

et

$$g_1u_2-g_2u_1=(mu_1+nv_1)\,u_2-(mu_2+nv_2)\,u_1=-n\,(u_1v_2-u_2v_1)\,.$$

Puisque $(m,n)\neq(0,0)$, on a ou bien $|m|\geqslant 1$, ou bien $|n|\geqslant 1$ et donc ou bien $|g_1v_2-g_2v_1|=|m|\,(u_1v_2-u_2v_1)\geqslant u_1v_2-u_2v_1$, ou bien $|g_1u_2-g_2u_1|=|n|\,(u_1v_2-u_2v_1)\geqslant u_1v_2-u_2v_1$. Mais alors, dans tous les cas,

$$\mathrm{Max}\{|g_1v_2-g_2v_1|\,,|g_1u_2-g_2u_1|\}\geqslant u_1v_2-u_2v_1.$$

27. On suppose sans perte de généralité (quite à remplacer u par $-u$) que $u_1v_2-u_2v_1>0$. Puisque $u_1v_2-u_2v_1$ est un entier, on a donc $u_1v_2-u_2v_1\geqslant 1$.

Soit $g=(g_1,g_2)\in I[u,v]\setminus\{0\}$. Si $|g_1v_2-g_2v_1|\geqslant u_1v_2-u_2v_1$, alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$1\leqslant u_1v_2-u_2v_1\leqslant|g_1v_2-g_2v_1|\leqslant\sqrt{g_1^2+g_2^2}\times\sqrt{v_2^2+(-v_1)^2}=\|g\|\times\|v\|$$

et si $|g_1v_2-g_2v_1|\geqslant u_1v_2-u_2v_1$, alors $\|g\|\times\|u\|\geqslant 1$. Soit $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\mathrm{Min}\left\{\dfrac{1}{\|u\|},\dfrac{1}{\|v\|}\right\}$. ε est un réel strictement positif tel que pour tout élément non nul g de $I[u,v]$, $\|g\|>\varepsilon$.

Remarque. On peut améliorer nettement la minoration en constatant que $u_1v_2-u_2v_1=\det(u,v)=\sin(u,v)\|u\|\|v\|$.

28. Montrons tout d'abord l'existence du minimum. Soit $A=\{\|g\|,\ g\in I[u,v],\ 0<\|g\|\leqslant\|u\|\}$.
Pour tout $g=(g_1,g_2)\in A$,

$$|g_1|\leqslant\sqrt{g_1^2+g_2^2}=\|g\|\leqslant\|u\|,$$

et de même, $|g_2|\leqslant\|u\|$. Par suite, puisque g_1 et g_2 sont des entiers relatifs compris au sens large entre $-\|u\|$ et $\|u\|$, A est un ensemble fini et non vide (car $\|u\|\in A$) de réels strictement positifs, de cardinal au plus $(2\|u\|+1)^2$. A ce titre, A admet un minimum δ. De plus, $\delta>0$ car δ est la norme d'un certain élément g non nul.

Soit alors $g \in I[u,v] \setminus \{0\}$. Si $g \in A$, $\|g\| \geqslant \delta$ et si $g \notin A$, $\|g\| > \|u\| \geqslant \delta$. Donc, δ est un minorant de $\{\|g\|,\ g \in I[u,v] \setminus \{0\}\}$, atteint en au moins un élément g de A. Ainsi, δ est le minimum de $\{\|g\|,\ g \in I[u,v] \setminus \{0\}\}$.

Soit $g = (g_1, g_2) \in I[u,v]$ tel que $\|g\| = \delta$. Alors, $\sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \delta$ et en particulier, $|g_1| \leqslant \delta$ et $|g_2| \leqslant \delta$. Puisque g_1 est un entier relatif, g_1 prend un nombre de valeurs au plus égal à $2\delta + 1$ de même que g_2 puis g prend un nombre de valeurs au plus égal à $(2\delta + 1)^2$. Ainsi, l'ensemble des éléments g de $I[u,v]$ dont la norme est égale à δ est fini (et non vide).

29. On pose $E = \{g \in I[u,v] /\ \|g\| = \delta\}$, $E_+ = \{g \in I[u,v] /\ \|g\| = \delta \text{ et } ((g_1 \geqslant 0 \text{ et } g_2 > 0) \text{ ou } (g_1 > 0 \text{ et } g_2 \leqslant 0))\}$ et $E_- = \{g \in I[u,v] /\ \|g\| = \delta \text{ et } ((g_1 < 0 \text{ et } g_2 \geqslant 0) \text{ ou } (g_1 \leqslant 0 \text{ et } g_2 > 0))\}$.

E_+ et E_- sont deux ensembles disjoints de réunion E ou encore (E_+, E_-) est une partition de E. On en déduit que $\text{card}(E) = \text{card}(E_+) + \text{card}(E_-)$.

Ensuite, pour tout $g \in G$, $g \in I[u,v] \Leftrightarrow -g \in I[u,v]$ et $\|g\| = \delta \Leftrightarrow \|-g\| = \delta$. En résumé, pour tout g de G, $g \in E \Leftrightarrow -g \in E$. Ainsi, $f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ g & \mapsto & -g \end{array}$ est bien une application. De plus, cette application est involutive et en particulier bijective.

$f(E_+) \subset E_-$ et $f(E_-) \subset E_+$ puis $E_- = f(f(E_-)) \subset f(E_+)$. Finalement, $f(E_+) = E_-$. Puisque f est une bijection, on en déduit que $\text{card}(E_+) = \text{card}(E_-)$ puis que

$$\text{card}(E) = \text{card}(E_+) + \text{card}(E_-) = 2\text{card}(E_+) \in 2\mathbb{N}.$$

