ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels, *C* l'ensemble des nombres complexes et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

1. Etudier les variations et la convexité de *f*.

2. Tracer le graphe de *f*.

3. Le graphe de *f* admet-il un centre de symétrie ?

4. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - 1}{x^2+1}\,dx$, pour tout $n \in N^*$.

Exercice n° 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence: $(3+u_n)u_{n+1} + 1 = 0$.

1. Calculer u_1 *et* u_2. Montrer que la suite est monotone.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et déterminer sa limite si elle existe.
3. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente.

Exercice n° 3

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls par :

$$g(x) = \cos(\sqrt{-x})$$

et la fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

1. Etudier les variations de h et tracer son graphe (on précisera la pente de la demie tangente en zéro).

2. Calculer $I = \int_0^1 h(x)\ dx$

3. Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \leq 0 \\ h(x) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f ainsi que de ses dérivées premières et secondes.

Exercice n° 4

On note $P = \{z \in C \ / \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in C \ / \ |z| < 1\}$, où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie réelle de z et $|z|$ son module. On considère l'application f définie sur C par : $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que f est une bijection de P sur D.

2. Déterminer le lieu géométrique des points d'affixe $f(z)$.

Exercice n° 5

On lance deux dés à 6 faces numérotées de 0 à 5. On effectue le produit des deux chiffres obtenus et on garde le chiffre des unités. On note X cette variable aléatoire. Par exemple si on obtient 3 et 4, le produit est égal à 12 et X=2.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer la probabilité que X=0.

3. Calculer la probabilité que X soit strictement supérieure à 4.

4. Sur ce jeu (lancement de ces deux dés), un joueur mise 10 euros.
La règle du jeu est la suivante :
- Si X=0, le joueur perd sa mise,
- Si X est pair et différent de zéro, le joueur gagne 2 euros,
- Si X est impair, non nul et strictement inférieur à 9, le joueur gagne 4 euros,
- Si X=9, le joueur gagne 60 euros.
Calculer l'espérance de gain pour ce jeu. Commenter le résultat obtenu.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la suite (u_n) définie par :

$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$, où $n! = 1 \times 2 \times .... \times n$

1. Calculer u_1.

2. Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n, en déduire l'expression de u_n.

3. Déterminer $\lim_{n \to \infty} u_n$.