SESSION 2022

CAPESA
Analystes statisticiens

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. La fonction f est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2+1\right) - (x-1)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2},$$

puis

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x+2)\left(x^2+1\right)^2 - \left(-x^2+2x+1\right) \times 2(2x)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} \\ &= 2\frac{(-x+1)\left(x^2+1\right) - 2x\left(-x^2+2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 2\frac{x^3-3x^2-3x+1}{\left(x^2+1\right)^3} \\ &= 2\frac{(x+1)\left(x^2-4x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}. \end{aligned}$$

Pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $-x^2+2x+1$. Le discriminant réduit de ce trinôme est $\Delta' = 1^2-(-1) = 2$. Ce trinôme admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1 = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$. Le coefficient de x^2 étant strictement négatif, on en déduit que la fonction g' est strictement négative sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ et strictement positive sur $\left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$.

Pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe de $(x+1)\left(x^2-4x+1\right)$. Le trinôme x^2-4x+1 admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1' = 2-\sqrt{3}$ et $x_2' = 2+\sqrt{3}$. Le signe de la fonction f'' est donné dans le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-4x+1		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur $]-\infty, -1]$ et sur $\left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]$ et convexe sur $\left[-1, 2-\sqrt{3}\right]$ et sur $\left[2+\sqrt{3}, +\infty\right[$. Enfin, la courbe représentative de f admet trois points d'inflexion à savoir ses points d'abscisses respectives -1, $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

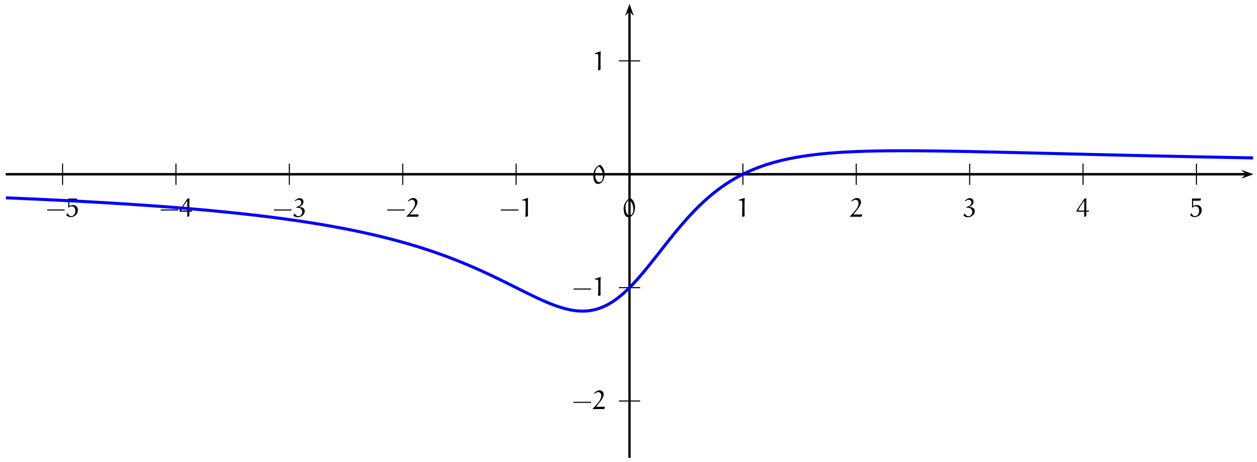
2. Graphe de f.

On note que

- $f(0) = -1$, $f(1) = 0$.
- $f\left(1+\sqrt{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} = 0,2\ldots$ puis par un calcul conjugué,

$f\left(1-\sqrt{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} = -1,2\ldots$

Graphe de la fonction f.



3. Si le graphe f admet un centre de symétrie, l'abscisse de ce centre est nécessairement le milieu des abscisses en lesquelles la fonction f admet un extremum à savoir $\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\right)=1$. Pour tout réel x, $f(2\times 1-x)=\dfrac{(2-x)-1}{(2-x)^2+1}=\dfrac{1-x}{(x-2)^2+1}$ puis

$$f(2-x)+f(x)=\frac{1-x}{(x-2)^2+1}+\frac{x-1}{x^2+1}.$$

Cette expression n'est pas constante sur $\mathbb{R}$ (car prend la valeur $\dfrac{1}{5}-1$ en 0 et 0 en 1). Donc, la courbe représentative de la fonction f n'admet pas de centre de symétrie.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $x\mapsto\dfrac{x^n-1}{x^2+1}$ est continue sur le segment $[0,1]$ et donc $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n-1}{x+1}\,dx$ existe.

1er cas. Si n est pair, posons $n=2p$ où $p\in\mathbb{N}^*$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\frac{x^n-1}{x^2+1}&=\frac{\left(x^{2p}+x^{2p-2}\right)-\left(x^{2p-2}+x^{2p-4}\right)+\ldots+(-1)^{p-1}\left(x^2+1\right)-(-1)^{p-1}-1}{x^2+1}\\&=\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^{2p-2}-x^{2p-4}+\ldots+(-1)^{p-1}\right)}{x^2+1}-\frac{1+(-1)^{p-1}}{x^2+1}\\&=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}x^{2k}-\frac{1-(-1)^p}{x^2+1}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}I_{2p}&=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\int_0^1 x^{2k}\,dx-\left(1-(-1)^p\right)\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx\\&=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p-1-k}}{2k+1}-\left(1-(-1)^p\right)(\mathrm{Arctan}(1)-\mathrm{Arctan}(0))\\&=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\left(1-(-1)^p\right)\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2ème cas. Si n est impair, posons $n=2p+1$ où $p\in\mathbb{N}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\frac{x^n-1}{x^2+1} &= \frac{\left(x^{2p+1}+x^{2p-1}\right)-\left(x^{2p-1}+x^{2p-3}\right)+\ldots+(-1)^{p-1}\left(x^3+x\right)-(-1)^{p-1}x-1}{x^2+1}\\ &= \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^{2p-1}-x^{2p-3}+\ldots+(-1)^{p-1}x\right)}{x^2+1}-\frac{1-(-1)^{p-1}x}{x^2+1}\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}x^{2k+1}-\frac{1+(-1)^p x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}I_{2p+1} &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\int_0^1 x^{2k+1}\,dx-\int_0^1\frac{1+(-1)^p x}{x^2+1}\,dx=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p-1-k}}{2k+2}-\left(\frac{\pi}{4}+(-1)^p\frac{\ln(2)}{2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{p-k}}{2k}-\frac{\pi}{4}-(-1)^p\frac{\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1. $(3+u_0)\,u_1+1=0$ puis $4u_1=-1$ et donc $u_1=-\dfrac{1}{4}$. Ensuite, $(3+u_1)\,u_2+1=0$ puis $\dfrac{11}{4}u_2=-1$ et donc $u_2=-\dfrac{4}{11}$.

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ posons $f(x)=-\dfrac{1}{3+x}$ de sorte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. Cherchons d'abord les points fixes de f. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f(x)=x &\Leftrightarrow -\frac{1}{x+3}=x\Leftrightarrow x(x+3)+1=0 \text{ et } x+3\neq 0\Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \text{ et } x+3\neq 0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

On pose $\alpha=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Vérifions que l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ est stable par la fonction f. Puisque $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}>-\dfrac{3}{2}>-3$, la fonction f est dérivable sur $[\alpha,+\infty[$ et pour tout réel $x\in[\alpha,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{(3+x)^2}>0$. Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$. On en déduit que $f\left([\alpha,+\infty[\right)\subset[f(\alpha),+\infty[=[\alpha,+\infty[$.

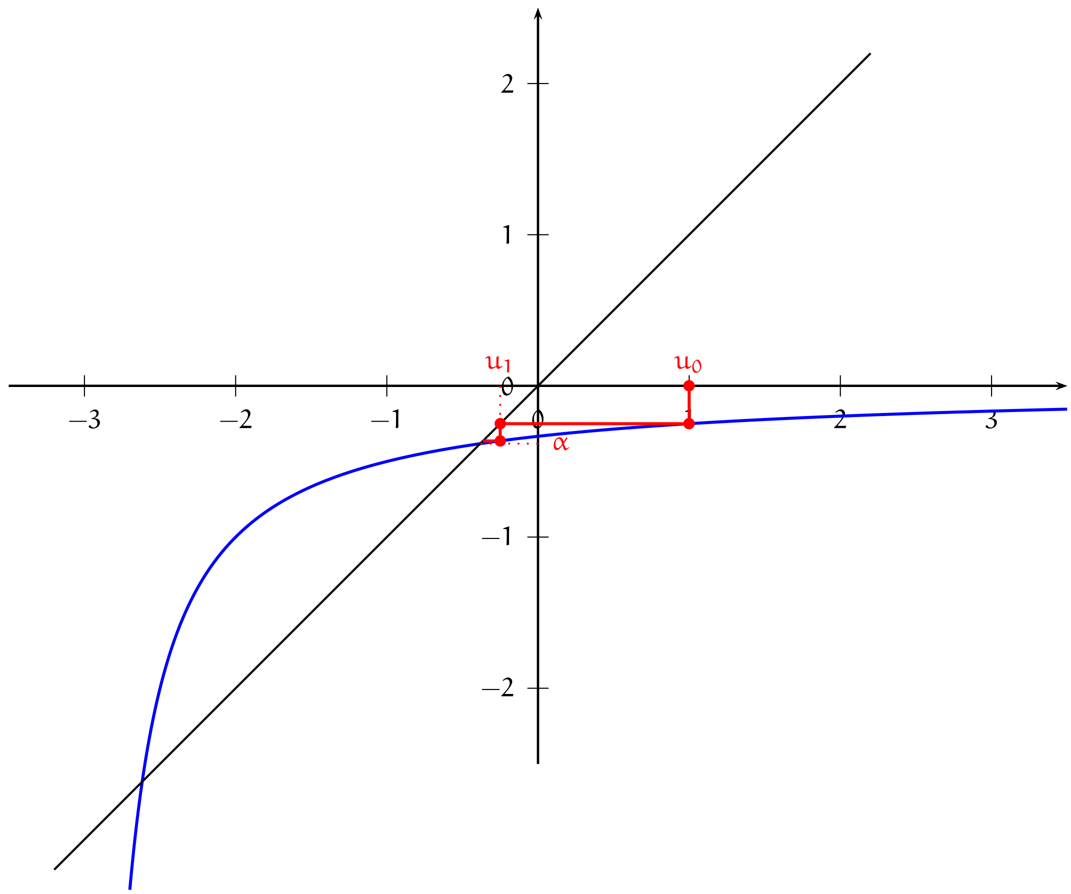
On peut alors étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Puisque $u_0=1\in[\alpha,+\infty[$ et que l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ est stable par la fonction f, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n\in[\alpha,+\infty[$.

Ensuite, puisque f est croissante sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[\alpha,+\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Enfin, puisque $u_1<u_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par α), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ. Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant\alpha$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell\geqslant\alpha$. Puisque la fonction f est continue sur $[\alpha,+\infty[$ et que $\ell\in[\alpha,+\infty[$, f est continue en ℓ et donc, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1}=f(u_n)$, on obtient $\ell=f(\ell)$. Par suite, $\ell\in\left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ puis $\ell=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}=\alpha$ car $\ell\geqslant\alpha$.

3. Représentation graphique le la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Exercice 3

1. La fonction h est définie et continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right).$$

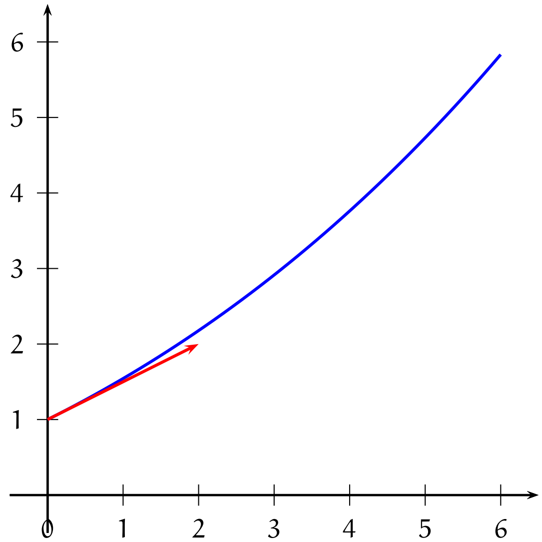
Pour tout réel strictement positif x, $\sqrt{x} > 0 > -\sqrt{x}$ puis $e^{\sqrt{x}} > e^{-\sqrt{x}}$ et donc $h'(x) > 0$. Ainsi, la fonction h est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Etudions maintenant la dérivabilité de la fonction h en 0 à droite.

$$h(x) \underset{h\to 0^+}{=} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{x}+\frac{x}{2}+1-\sqrt{x}+\frac{x}{2}+o(x)\right) \underset{h\to 0^+}{=} 1+\frac{1}{2}x+o(x).$$

La fonction h admet un développement limité à droite en 0. La fonction h est donc dérivable à droite en 0 et de plus, $h'_d(0) = \dfrac{1}{2}$. La courbe représentative de h admet au point de coordonnées $(0,h(0)) = (0,1)$ une demie tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2}x+1$ (et en particulier, de pente $\dfrac{1}{2}$).

Graphe de la fonction h.



2. La fonction h est continue sur le segment $[0,1]$ et donc I existe. En posant $t=\sqrt{x}$ et donc $x=t^2$ puis $dx=2t\ dt$, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^t+e^{-t}\right)2t\ dt = \int_0^1 t\left(e^t+e^{-t}\right)dt \\
&= \left[t\left(e^t-e^{-t}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(e^t-e^{-t}\right)dt \text{ (à l'aide d'une intégration par parties)} \\
&= \left[t\left(e^t-e^{-t}\right)-\left(e^t+e^{-t}\right)\right]_0^1 \\
&= \left(e-e^{-1}\right)-\left(e+e^{-1}\right)-(-2) = 2-\frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$. Ensuite, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0) = 1 = f(0)$. Donc, la fonction f est continue à droite en 0 et finalement continue sur $]-\infty,+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)$ et pour tout $x<0$, $f'(x)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{2\sqrt{-x}}$. Ensuite, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\dfrac{1}{2}$ et d'autre part, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+o\left(\sqrt{x}\right)\right)=\dfrac{1}{2}+o(1)$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\dfrac{1}{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, f est continue sur $]-\infty,+\infty[$, dérivable à dérivée continue sur $]-\infty,+\infty[\setminus\{0\}$ et f' a une limite en 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, on sait que la fonction f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0 de sorte que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. Finalement, f' est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$.

En résumé, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{2\sqrt{-x}} \text{ si } x<0 \\
\dfrac{1}{2} \text{ si } x=0 \\
\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right) \text{ si } x>0
\end{array}\right. .$$

Mais alors, f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0^-}{=} \frac{1}{2\sqrt{-x}}\left(\sqrt{-x}-\frac{-x\sqrt{-x}}{6}+o\left(x\sqrt{-x}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0^-}{=} \frac{1}{2}+\frac{1}{12}x+o(x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{4\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}+\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{6}-1+\sqrt{x}-\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{6}+o\left(x\sqrt{-x}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{2}+\frac{1}{12}x+o(x).
\end{aligned}$$

En résumé, $f'(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{2}+\frac{1}{12}x+o(x)\underset{x\to 0}{=}f'(0)+\frac{1}{12}x+o(x)$. Puisque la fonction f' admet en 0 un développement limité d'ordre 1, la fonction f' est dérivable en 0 ou encore la fonction f est deux fois dérivable en 0. De plus, $f''(0)=\frac{1}{12}$.

Analysons maintenant la continuité de la fonction f''. La fonction f'' est continue sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{8x\sqrt{x}}\left(-\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\right),
\end{aligned}$$

et pour tout $x<0$, (en tenant compte de $\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)'=\left((-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\times(-1)\times\frac{1}{(-x)\sqrt{-x}}=-\frac{1}{2x\sqrt{-x}}$),

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x\sqrt{-x}}\sin\left(\sqrt{-x}\right)+\frac{1}{\sqrt{-x}}\times\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\cos\left(\sqrt{-x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4x\sqrt{-x}}\left(-\sin\left(\sqrt{-x}\right)+\sqrt{-x}\cos\left(\sqrt{-x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
f''(x) &\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{8x\sqrt{x}}\left(-\left(1+\sqrt{x}+\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{6}-1+\sqrt{x}-\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{6}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}+\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{6}+1-\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{x}}{6}\right)+o\left(x\sqrt{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{8x\sqrt{x}}\left(-\left(2\sqrt{x}+\frac{x\sqrt{x}}{3}\right)+\sqrt{x}\,(2+x)+o\left(x\sqrt{x}\right)\right)\underset{x\to 0^+}{=}\frac{1}{8x\sqrt{x}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}+o\left(x\sqrt{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{12}+o(1).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f''(x) &\underset{x\to 0^-}{=} \frac{1}{4x\sqrt{-x}}\left(-\left(\sqrt{-x}+\frac{x\sqrt{-x}}{6}\right)+\sqrt{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)+o\left(x\sqrt{-x}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0^-}{=} \frac{1}{4x\sqrt{-x}}\left(\frac{x\sqrt{-x}}{3}+o\left(x\sqrt{-x}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0^-}{=} \frac{1}{12}+o(1).
\end{aligned}$$

En résumé, $f''(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{12}+o(1)\underset{x\to 0}{=}f''(0)+o(1)$. Ceci montre que la fonction f'' est continue en 0 et finalement, la fonction f'' est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. • Soit $z \in P$. $\text{Im}(z+i) = \text{Im}(z) + 1 \neq 0$ puis $z + i \neq 0$ et donc $f(z)$ existe dans $\mathbb{C}$. Ensuite, en posant $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|z-i|^2 - |z+i|^2 = \left(a^2 + (b-1)^2\right) - \left(a^2 + (b+1)^2\right) = -4b < 0$$

et donc $|z-i| < |z+i|$ puis $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1$. Ainsi, $f(z) \in D$. Ceci montre que f est effectivement une application de P vers D.

• Soit maintenant $Z \in D$. On va montrer qu'il existe un élément z de P et un seul tel que $f(z) = Z$.

$$f(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = Z \Leftrightarrow z - i = zZ + iZ \Leftrightarrow z(1-Z) = i(1+Z) \Leftrightarrow z = \frac{i(1+Z)}{1-Z}.$$

Ceci montre déjà l'unicité de z. Il reste à vérifier que le nombre complexe z obtenu est bien défini et est élément de P. Puisque $Z \in D$, $|Z| < 1$ puis $Z \neq 1$ puis $1 - Z \neq 0$. Donc $z = \dfrac{i(1+Z)}{1-Z}$ existe dans $\mathbb{C}$. Enfin,

$$\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{i(1+Z)}{1-Z} - \frac{-i(1+\overline{Z})}{\overline{1-Z}}\right) = \frac{(1+Z)\left(1-\overline{Z}\right) + (1-Z)\left(1+\overline{Z}\right)}{2|1-Z|^2} = \frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > 0$$

et donc $z \in P$. On a montré que : $\forall Z \in D,\ \exists! z \in P/\ f(z) = Z$ (à savoir $z = \dfrac{i(1+Z)}{1-Z}$). Donc, f est une bijection de P sur D.

2. L'énoncé est incomplet car il ne dit pas dans quel ensemble varie z. Si z varie dans P, le lieu géométrique cherché est D.

Exercice 5

1. Déterminons d'abord les valeurs prises par X :

- $0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0 \times 2 = 2 \times 0 = 0 \times 3 = 3 \times 0 = 0 \times 4 = 4 \times 0 = 0 \times 5 = 5 \times 0 = 0 \equiv 0\ [10]$
- $1 \times 1 = 1 \equiv 1\ [10]$
- $1 \times 2 = 2 \times 1 = 2 \equiv 2\ [10]$
- $1 \times 3 = 3 \times 1 = 3 \equiv 3\ [10]$
- $1 \times 4 = 4 \times 1 = 4 \equiv 4\ [10]$
- $1 \times 5 = 5 \times 1 = 5 \equiv 5\ [10]$
- $2 \times 2 = 4 \equiv 4\ [10]$
- $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6 \equiv 6\ [10]$
- $2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \equiv 8\ [10]$
- $2 \times 5 = 5 \times 2 = 10 \equiv 0\ [10]$
- $3 \times 3 = 9 \equiv 9\ [10]$
- $3 \times 4 = 4 \times 3 = 12 \equiv 2\ [10]$
- $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15 \equiv 5\ [10]$
- $4 \times 4 = 16 \equiv 6\ [10]$
- $4 \times 5 = 5 \times 4 = 20 \equiv 0\ [10]$
- $5 \times 5 = 25 \equiv 5\ [10]$

L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

La valeur 0 est obtenue pour les couples $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(0,4)$, $(4,0)$, $(0,5)$, $(5,0)$, $(2,5)$, $(5,2)$, $(4,5)$, $(5,4)$. Donc, $P(X=0) = \dfrac{15}{36}$.

La valeur 1 est obtenue pour le couple $(1,1)$. Donc, $P(X=1) = \dfrac{1}{36}$.

La valeur 2 est obtenue pour les couples $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,4)$, $(4,3)$. Donc, $P(X=2) = \dfrac{4}{36}$.

La valeur 3 est obtenue pour les couples $(1,3)$, $(3,1)$. Donc, $P(X=3) = \dfrac{2}{36}$.

La valeur 4 est obtenue pour les couples $(1,4)$, $(4,1)$, $(2,2)$. Donc, $P(X=4) = \dfrac{3}{36}$.

La valeur 5 est obtenue pour les couples $(1,5)$, $(5,1)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(5,5)$. Donc, $P(X=5) = \dfrac{5}{36}$.

La valeur 6 est obtenue pour les couples $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 4)$. Donc, $P(X = 6) = \dfrac{3}{36}$.

La valeur 8 est obtenue pour les couples $(2, 4)$, $(4, 2)$. Donc, $P(X = 8) = \dfrac{2}{36}$.

La valeur 9 est obtenue pour le couple $(3, 3)$. Donc, $P(X = 9) = \dfrac{1}{36}$.

Résumons ces résultats dans un tableau :

x	0	1	2	3	4	5	6	8	9
$P(X = x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. $P(X = 0) = \dfrac{15}{36}$.

3. $P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 9) = \dfrac{5 + 3 + 2 + 1}{36} = \dfrac{11}{36}$.

4. Notons Y le gain du joueur. Nous supposerons que les gains annoncés sont les gains nets, c'est-à-dire mise comprise. Y prend donc les valeurs -10, 2, 4 et 60.

- $P(Y = -10) = P(X = 0) = \dfrac{15}{36}$.
- $P(Y = 2) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) = \dfrac{12}{36}$
- $P(Y = 4) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = \dfrac{8}{36}$
- $P(Y = 60) = P(X = 9) = \dfrac{1}{36}$

Par suite, $E(Y) = \dfrac{15}{36} \times (-10) + \dfrac{12}{36} \times 2 + \dfrac{8}{36} \times 4 + \dfrac{1}{36} \times 60 = \dfrac{-150 + 24 + 32 + 60}{36} = -\dfrac{34}{36} = -\dfrac{17}{18}$.

L'espérance est strictement négative et donc le jeu est défavorable au joueur. De plus, en moyenne, le joueur perd environ 1 euro à chaque fois qu'il joue.

Exercice 6

1. Une intégration par parties fournit

$$u_1 = \int_0^1 (1 - t)e^t \, dt = \left[(1 - t)e^t\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)e^t \, dt = -1 + \left[e^t\right]_0^1 = e - 2.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1 - t)^{n+1} e^t \, dt = \frac{1}{(n+1)!} \left(\left[(1 - t)^{n+1} e^t\right]_0^1 + (n + 1) \int_0^1 (1 - t)^n e^t \, dt \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^t \, dt = -\frac{1}{(n+1)!} + u_n. \end{aligned}$$

En résumé, $u_1 = e - 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

3. Soit $n \geqslant 2$. Par télescopage,

$$u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = e - 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

