ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN	ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE-DAKAR	INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est <u>obligatoire</u> et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx$.
2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x+5\cos x - \ln x}{5x+1+\ln(x^2+1)}$.
3. Donner le comportement au voisinage de $x=0$ de la même fonction.
4. Ecrire le nombre complexe $z = -2\sqrt{3} - 2i$ sous forme trigonométrique.
5. Donner le domaine de définition de la fonction
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$
6. Donner une expression simple de la dérivée de la fonction définie à la question précédente.
7. Une étude montre qu'après un repas, 1 personne sur 3 prend un café, 1 personne sur 6 en prend 2, et les autres n'en prennent pas du tout. Deux personnes viennent de finir leur repas, et on note X le nombre de cafés consommés : pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.

8. On considère la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

9. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour $n \geq 0$. Déterminer la nature de la suite définie par $v_n = u_n - 1$, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

10. Résoudre l'equation $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

1. (a) Donner le domaine de définition de f_n, et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que toutes les courbes représentatives de f_n ont deux points communs, que l'on déterminera.
   (c) Etudier les variations des fonctions f_1, f_2 et f_3, et dresser leurs tableaux de variation.
   (d) Représenter graphiquement f_1, f_2 et f_3 sur une même figure. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.
   (e) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 1.
   (f) On suppose que cette tangente coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(4/5, 0)$: quelle est la valeur de n ?
2. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

   (a) Calculer I_1 et I_2.
   (b) Etudier la monotonie de la suite I_n.
   (c) Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (I_n).
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
   (b) En déduire que

$$0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (nI_n) quand $n \to \infty$.

Exercice 3

1. Pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, on considère la fonction de la variable réelle f_a définie par

$$f_a(x) = \frac{x+a}{1+x^2+a^2} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

   (a) Faire l'étude de cette fonction, dresser son tableau de variations et montrer qu'elle admet un unique maximum, atteint en un point x_a dont on donnera l'expression en fonction de a.

(b) Donner la valeur de ce maximum.

(c) Dessiner la courbe représentative de la fonction f_2.

2. On considère désormais la fonction de la variable y

$$g(y) = \frac{1}{2\left(\sqrt{2y^2+1} - y\right)}.$$

(a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

$$2y = \sqrt{2y^2+1}$$

(b) Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de g.

(c) Montrer que g' est de signe constant sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$ et sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$. En déduire la valeur maximale prise par $g(y)$.

(d) Dresser le tableau de variations de g.

3. Donner la valeur maximale que peut prendre l'expression

$$\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

quand x et y décrivent $\mathbf{R}$, et préciser pour quelles valeurs de x et y ce maximum est atteint.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

(c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

(d) En déduire la valeur de I_{2n} et celle de I_{2n+1}.

2. (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $\dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$.

(b) En déduire la limite de $\dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ quand $n \to \infty$.

3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, montrer que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 2}{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1} \right)^2.$$

4. Montrer que

$$(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1 = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$$

et en déduire que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

5. On lance une pièce équilibrée $2n$ fois et on note p_n la possibilité d'obtenir exactement n résultats "pile". Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}p_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 5

1. Pour tout nombre entier $n \geq 1$, montrer l'inégalité

$$\frac{n}{\sqrt{n+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2. On considère désormais la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Etudier la monotonie, puis la convergence de cette suite.

3. Prouver l'inégalité

$$u_{2n} < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

4. En déduire que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $z(z+1) \in \mathbf{R}$ correspond à deux droites du plan complexe que l'on dessinera.
2. On considère trois points distincts du plan affine A, B et C, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Montrer que les trois points sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_B}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des nombres complexes z tels que les images de z, z^2 et z^4 soient alignées.
4. Illustrer ce résultat pour le nombre complexe vérifiant la propriété précédente et dont la partie imaginaire est égale à 1 (on pourra utiliser le même graphique qu'à la question 1).

Exercice 7

Deux personnes A et B jouent aux dés selon la règle suivante : A mise la somme a, B mise la somme b. Si le dé tombe sur 1 ou 2, A récupère sa mise et empoche celle de B ; s'il tombe sur 4, 5 ou 6, B récupère sa mise et empoche celle de A ; et s'il tombe sur 3, chaque joueur récupère sa mise. On suppose que le dé utilisé dans ce jeu n'est pas truqué, donc que chaque face apparaît avec la même probabilité.

On note X la variable aléatoire égale au gain de A (c'est-à-dire la différence entre ce qu'il obtient après le lancer du dé et ce qu'il a misé), et Y la variable aléatoire égale au gain de B.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leurs espérances.
2. Calculer la valeur de la variable $X + Y$ et interpréter le résultat.
3. Le jeu est dit équitable si l'espérance du gain de chaque joueur est nulle. A quelle(s) condition(s) sur a et b le jeu ainsi défini est-il équitable ?