CAPESA

Analystes statisticiens

PREMIERE COMPOSITION

Exercice 1

1. Pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $3 + \sin(x) \geqslant 3 > 0$. Donc, la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{3 + \sin(x)}$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que l'intégrale proposée existe. Ensuite, en tenant compte de $(3 + \sin(x))' = \cos(x)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{3 + \sin(x)}\, dx = [\ln|3 + \sin(x)|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(4) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

2. D'après un théorème de croissances comparées, $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$ et d'autre part, $5\cos(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(1)$ puis $5\cos(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$. Donc, $x + 5\cos(x) - \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$. Ensuite, $\ln\left(x^2 + 1\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\left(x^2\right) = 2\ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$ et donc $5x + 1 + \ln\left(x^2 + 1\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} 5x$. Mais alors

$$\frac{x + 5\cos(x) - \ln(x)}{5x + 1 + \ln\left(x^2 + 1\right)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + 5\cos(x) - \ln(x)}{5x + 1 + \ln\left(x^2 + 1\right)} = \frac{1}{5}$.

3. $x + 5\cos(x) - \ln(x) = -\ln(x) + 5\cos(x) + x \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$ et $5x + 1 + \ln\left(x^2 + 1\right) \underset{x \to 0}{\sim} 1$. Donc, $\frac{x + 5\cos(x) - \ln(x)}{5x + 1 + \ln\left(x^2 + 1\right)} \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$ puis $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + 5\cos(x) - \ln(x)}{5x + 1 + \ln\left(x^2 + 1\right)} = +\infty$.

4. $-2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ ou encore si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$.
Si $x \geqslant 1$, $x + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant 1 + 0 > 0$ et donc $f(x)$ existe.
Si $x \leqslant -1$, alors $-x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ puis

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(-x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} < 0$$

et donc $f(x)$ n'existe pas. Finalement, $D_f = [1, +\infty[$.

6. f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout réel $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

7. La probabilité qu'une personne prenne un café est $\frac{1}{3}$. La probabilité qu'une personne prenne deux café est $\frac{1}{6}$ et donc la probabilité qu'une personne ne prenne pas de café est $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Notons alors A et B les deux personnes puis X_A (resp. X_B) la variable aléatoire égale au nombre de cafés pris par A (resp. B). On supposera que le nombre de cafés pris par une personne est indépendant du nombre de café pris par l'autre personne (ce qui n'est pas tout à fait le cas dans la réalité) ou encore que les variables X_A et X_B sont indépendantes.

L'ensemble des valeurs prises par la variable X est $[\![0,4]\!]$.

- $P(X=0)=P\left((X_A=0)\cap(X_B=0)\right)=P\left(X_A=0\right)\times P\left(X_B=0\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.
- $P(X=1)=P\left((X_A=0)\cap(X_B=1)\right)+P\left((X_A=1)\cap(X_B=0)\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$.
- $P(X=2)=P\left((X_A=0)\cap(X_B=2)\right)+P\left((X_A=1)\cap(X_B=1)\right)+P\left((X_A=2)\cap(X_B=0)\right)=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{18}$.
- $P(X=3)=P\left((X_A=1)\cap(X_B=2)\right)+P\left((X_A=2)\cap(X_B=1)\right)=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$.
- $P(X=4)=P\left(X_A=2\right)\times P\left(X_B=2\right)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$.

$\mathbb{E}(X)=0\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{5}{18}+3\times\dfrac{1}{9}+4\times\dfrac{1}{36}\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{4}{3}$. L'espérance de la variable X est égale à $\dfrac{4}{3}$.

8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ puis

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=n+2}^{2(n+1)}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+2}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}.$$

Mais alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n>0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

D'autre part, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leqslant\underbrace{\dfrac{1}{n}+\ldots+\dfrac{1}{n}}_{n\text{ termes}}=n\times\dfrac{1}{n}=1$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln(2)$.

9. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}-1=3u_n-3=3\left(u_n-1\right)=3v_n$. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0=u_0-1=-1$ et de raison $q=3$. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0q^n=-3^n$ puis

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n+1=1-3^n.$$

On en déduit encore que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

10. Soit $x\in\mathbb{R}$. $x^4+4x^2-1=\left(x^2+2\right)^2-5=\left(x^2+2-\sqrt{5}\right)\left(x^2+2+\sqrt{5}\right)$. Pour tout réel x, $x^2+2+\sqrt{5}>0$. D'autre part, $4<5$ puis $2<\sqrt{5}$ et donc $\sqrt{5}-2>0$. Par suite, pour tout réel x,

$$x^4+4x^2-1=0\Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{5}-2\right)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{5}-2}\text{ ou }x=-\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation proposée est $\left\{\sqrt{\sqrt{5}-2},-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right\}$.

Pour tout nombre complexe z,

$$z^4-4z^2+1=\left(z^2-\left(\sqrt{5}-2\right)\right)\left(z^2+\left(\sqrt{5}+2\right)\right)=\left(z-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\left(z+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\left(z-i\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)\left(z+i\sqrt{\sqrt{5}+2}\right).$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée est $\left\{\sqrt{\sqrt{5}-2},-\sqrt{\sqrt{5}-2},i\sqrt{\sqrt{5}+2},-i\sqrt{\sqrt{5}+2}\right\}$.

Exercice 2

1. a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_n'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=(n-x)x^{n-1}e^{-x}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n. Si un point est commun à toutes les courbes représentatives, alors ce point appartient aux courbes C_1 et C_2.
Pour tout réel x, $f_2(x) = f_1(x) \Leftrightarrow x(x-1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Les courbes représentatives des fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ ont en commun au plus deux points, à savoir les points de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

Réciproquement, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{e}$, les points de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ appartiennent effectivement à toutes les courbes C_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Pour tout réel x, $f_1(x) = xe^{-x}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Ensuite, pour tout réel x, $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$. Pour tout réel x, le signe de $f_1'(x)$ est le signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Pour tout réel x, $f_2(x) = x^2e^{-x}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Ensuite, pour tout réel x, $f_2'(x) = (1-x)xe^{-x}$. Pour tout réel x, le signe de $f_2'(x)$ est le signe de $x(1-x)$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f_2 :

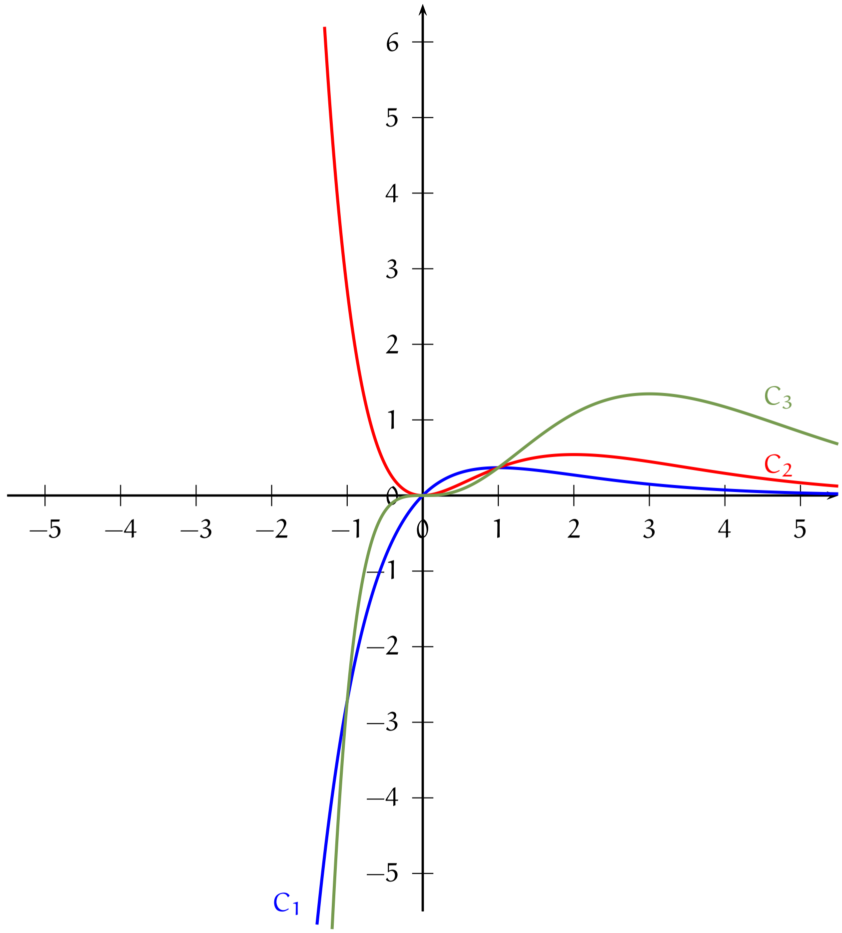
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Pour tout réel x, $f_3(x) = x^3e^{-x}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Ensuite, pour tout réel x, $f_3'(x) = (1-x)x^2e^{-x}$. Pour tout réel x, le signe de $f_3'(x)$ est le signe de $x^2(1-x)$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f_3 :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
f_3	$+\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

d) Graphes des fonctions f_1, f_2 et f_3.

$f_1'(0) = 1$ et donc la tangente à C_1 au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = x$ (de pente 1).
$f_2'(0) = f_3'(0) = 0$ et donc la tangente à C_2 et C_3 au point d'abscisse 0 est l'axe (Ox) (de pente 0).



e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(1) = e^{-1}$ et $f'_n(1) = (n-1)e^{-1}$. Donc, une équation de la tangente à C_n en son point d'abscisse 1 est $y = (n-1)e^{-1}(x-1) + e^{-1}$ ou encore $y = (n-1)e^{-1}x - (n-2)e^{-1}$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note T_n la tangente à C_n en son point d'abscisse 1. Soit $A\left(\dfrac{4}{5}, 0\right)$.

$$A \in C_n \Leftrightarrow \frac{4}{5}(n-1)e^{-1} - (n-2)e^{-1} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}n + \frac{6}{5} = 0 \Leftrightarrow n = 6.$$

2. a) Les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\, dx = \left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right) dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}.$$

De même, une intégration par parties fournit :

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx = \left[x^2\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}\, dx = -e^{-1} + 2I_1 = -e^{-1} + 2 - 4e^{-1} = 2 - 5e^{-1} = \frac{2e-5}{e}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, $x \leqslant 1$ puis $x^{n+1} \leqslant x^n$ puis $x^{n+1}e^{-x} \leqslant x^n e^{-x}$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\, dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$ ou encore $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout x de $[0,1]$, $x^n e^{-x} \leqslant x^n e^0 = x^n$. Par croissance de l'intégration, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$.

d) D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive sur $[0,1]$. Par positivité de l'intégration, on en déduit que $I_n \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx = \left[x^{n+1}\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\left(-e^{-x}\right)\,dx = -e^{-1} + (n+1)I_n,$$

puis $I_n - \dfrac{1}{(n+1)e} = \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2)b) $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ puis $0 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et donc

$$0 \leqslant I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la question précédente, on déduit successivement $0 \leqslant nI_n - \dfrac{n}{(n+1)e} \leqslant \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$ puis $-\dfrac{1}{(n+1)e} \leqslant nI_n - \dfrac{n}{(n+1)e} - \dfrac{1}{(n+1)e} \leqslant \dfrac{n}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{(n+1)e}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{(n+1)e} \leqslant nI_n - \frac{1}{e} \leqslant \frac{n}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)e}.$$

Les membres de gauche et de droite de cet encadrement tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{e}.$$

Exercice 3

1. a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, $1 + x^2 + a^2 > 0$ et en particulier, pour tout réel x, $1 + x^2 + a^2 \neq 0$. La fonction f_a est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f_a'(x) = \frac{\left(1 + x^2 + a^2\right) - (x+a)(2x)}{\left(1 + x^2 + a^2\right)^2} = \frac{-x^2 - 2ax + a^2 + 1}{\left(1 + x^2 + a^2\right)^2}.$$

Pour tout réel x, $f_a'(x)$ est du signe de $-x^2 - 2ax + a^2 + 1$. Le discriminant réduit de ce trinôme est $\Delta' = (-a)^2 + \left(a^2+1\right) = 2a^2 + 1$. Le trinôme admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1 = \dfrac{a - \sqrt{2a^2+1}}{-1} = -a + \sqrt{2a^2+1}$ et $x_2 = -a - \sqrt{2a^2+1}$.

Le coefficient de x^2 étant strictement négatif, on en déduit que la fonction f_a' est strictement négative sur $\left]-\infty, -a - \sqrt{2a^2+1}\right[\cup \left]-a + \sqrt{2a^2+1}, +\infty\right[$ et strictement positive sur $\left]-a - \sqrt{2a^2+1}, -a + \sqrt{2a^2+1}\right[$. Mais alors, la fonction f_a est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -a - \sqrt{2a^2+1}\right]$ et sur $\left[-a + \sqrt{2a^2+1}, +\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[-a - \sqrt{2a^2+1}, -a + \sqrt{2a^2+1}\right]$.

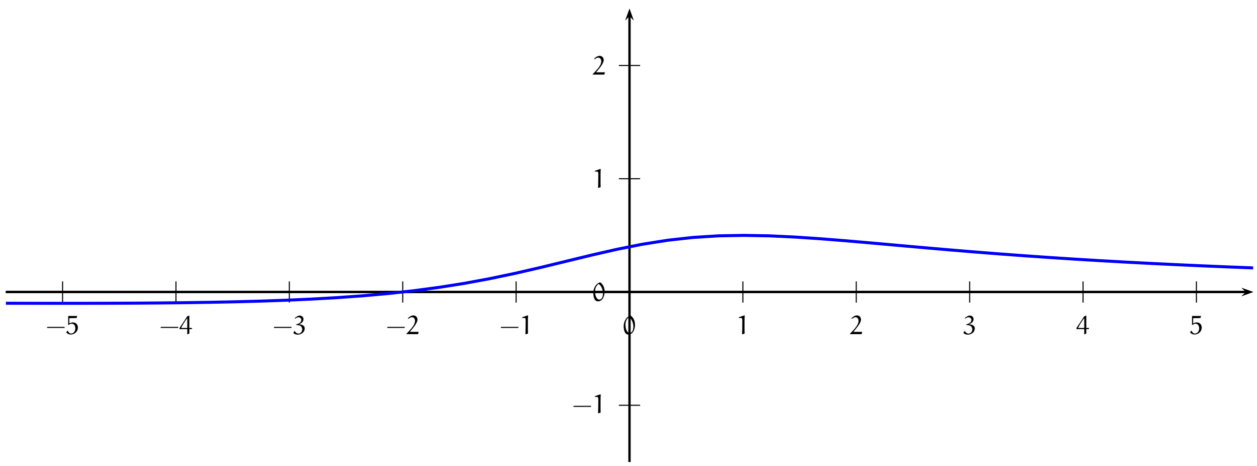
Ensuite, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$ et $f_a\left(-a + \sqrt{2a^2+1}\right) = \dfrac{\sqrt{2a^2+1}}{a^2 + 1 + \left(-a + \sqrt{a^2+1}\right)^2} > 0$. Donc, la fonction f_a admet un maximum atteint en $x_a = -a + \sqrt{2a^2+1}$.

b) Plus précisément, la valeur de ce maximum est

$$\begin{aligned} f_a\left(x_a\right) &= \frac{\sqrt{2a^2+1}}{a^2 + 1 + a^2 - 2a\sqrt{2a^2+1} + 2a^2 + 1} = \frac{\sqrt{2a^2+1}}{4a^2 + 2 - 2a\sqrt{2a^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{2a^2+1}}{2\left(2a^2 + 1 - a\sqrt{2a^2+1}\right)} = \frac{1}{2\left(\sqrt{2a^2+1} - a\right)}. \end{aligned}$$

Le maximum de la fonction f_a est égal à $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{2a^2+1}-a\right)}$.

c) Graphe de la fonction f_2**.** La fonction f_2 admet ses extremums en 1 et -5. Le minimum de la fonction f_2 est $f_2(-5) = -\dfrac{1}{6}$ et le maximum de la fonction f_2 est $f_2(1) = \dfrac{1}{2}$.



2. a) Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{2y^2+1} = 2y \Leftrightarrow 2y^2+1 = (2y)^2 \text{ et } 2y \geqslant 0 \Leftrightarrow 2y^2-1 = 0 \text{ et } y \geqslant 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{2y^2+1} - y \geqslant \sqrt{y^2+1} - y > \sqrt{y^2} - y = |y| - y \geqslant 0$$

Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2y^2+1} - y > 0$ et en particulier, $\sqrt{2y^2+1} - y \neq 0$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel y, $2y^2+1 > 0$. Par suite, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel y,

$$g'(y) = -\frac{1}{2} \times \frac{\dfrac{4y}{2\sqrt{2y^2+1}} - 1}{\left(\sqrt{2y^2+1} - y\right)^2} = \frac{-2y + \sqrt{2y^2+1}}{2\sqrt{2y^2+1}\left(\sqrt{2y^2+1} - y\right)^2}.$$

c) Pour tout réel y, $g'(y)$ est du signe de $-2y + \sqrt{2y^2+1}$. On sait déjà que pour tout réel y, $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. De plus, la fonction g' est continue sur $\mathbb{R}$ et garde donc un signe constant sur chacun des deux intervalles $\left]-\infty, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Puisque $g'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et que $g'(1) < 0$ car $-2 + \sqrt{3} < 0$, la fonction g' est strictement positive sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ puis la fonction g est strictement croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

La fonction g admet donc un maximum en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et ce maximum est

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\left(\sqrt{2 \times \dfrac{1}{2} + 1} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2\left(\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d) Tableau de variation de la fonction g.

y	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $h(x, y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

D'après les questions 1-b) et 2-c), pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{x+y}{1+x^2+y^2} = f_y(x) \leqslant \frac{1}{2\left(\sqrt{2y^2+1}-y\right)} = g(y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

avec égalité effectivement obtenue pour $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puis $x = -y + \sqrt{2y^2+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

En résumé, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x, y) \leqslant h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Donc, la fonction h admet sur $\mathbb{R}^2$ un maximum égal à $h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ou encore à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4

1. a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ et donc $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ puis $dx = -dt$, on obtient

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx.$$

c) Soit $n \geqslant 2$. Les deux fonctions $x \mapsto \sin^{n-1}(x)$ et $x \mapsto -\cos(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \times \sin(x)\, dx \\
&= \left[\sin^{n-1}(x)(-\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)(-\cos(x)\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\, dx = (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx\right) \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Donc, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ puis $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} \times \dfrac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} \times I_0 = \dfrac{(2p-1)\times(2p-3)\times\ldots\times 1}{(2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 2} \times \dfrac{\pi}{2}$. On peut poursuivre :

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= \frac{(2p)\times(2p-1)\times(2p-2)\times(2p-3)\times\ldots\times 4\times 3\times 2}{((2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} \times \dfrac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \dfrac{2}{3} \times I_1 = \dfrac{(2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \ldots \times 3}$. On peut poursuivre :

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{((2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 4 \times 2)^2}{(2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times \ldots \times 3 \times 2} \\ &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$. On a montré que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \leqslant 1$ puis, après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel positif $\sin^n(x)$, on obtient $\sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$.

Par croissance de l'intégration, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$ ou encore $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \geqslant 0$. On a $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Maintenant, I_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $I_n > 0$. Après division des trois membres de l'encadrement par le réel strictement positif I_n, on obtient $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_n}{I_n}$ ou encore $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$ ou enfin,

$$1 \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

b) Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\left(\dfrac{I_n}{I_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 1-d),

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \ldots \times 3 \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 4 \times 2} \times \frac{(2p+1) \times (2p-1) \times \ldots \times 3 \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{2p+1}\left(\frac{(2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 2}{(2p-1) \times (2p-3) \times \ldots \times 1}\right)^2 = \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \times \frac{\pi}{2}.$$

D'après la question 2-b), $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2p+1}\left(\frac{(2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 2}{(2p-1) \times (2p-3) \times \ldots \times 1}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$.

4. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1 &= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n \times n \times (n-1) \times \ldots \times 1} = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Par suite, $\dfrac{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 2}{(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 1} = 2^n n! \times \dfrac{2^n n!}{(2n)!} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$.

Mais alors

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}\sqrt{\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 2}{(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 1}\right)^2}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}$.

5. Soit $n \geqslant 1$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu en $2n$ lancers. On sait que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètre $2n$ et $\dfrac{1}{2}$. Par suite, $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $P(X_n = k) = C_{2n}^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ et en particulier,

$$\sqrt{n}p_n = \sqrt{n} \times C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!^2}.$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}p_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Exercice 5

1. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sqrt{k} < \sqrt{n+1}$ puis $\dfrac{1}{\sqrt{k}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{n \text{ termes}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

2. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)
\end{aligned}$$

et donc $u_{n+1} - u_n < 0$ d'après la question précédente.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} < u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. D'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0. Etant décroissante et minorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\
&< \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2n} \times \frac{2n-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

4. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, par passage à la limite, on a déjà $\ell \geqslant 0$. D'autre part, la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ. On fait tendre n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question précédente et on obtient $\ell \leqslant \dfrac{1}{2}\ell + 0$ puis $\dfrac{\ell}{2} \leqslant 0$ puis $\ell \leqslant 0$ et finalement $\ell = 0$.

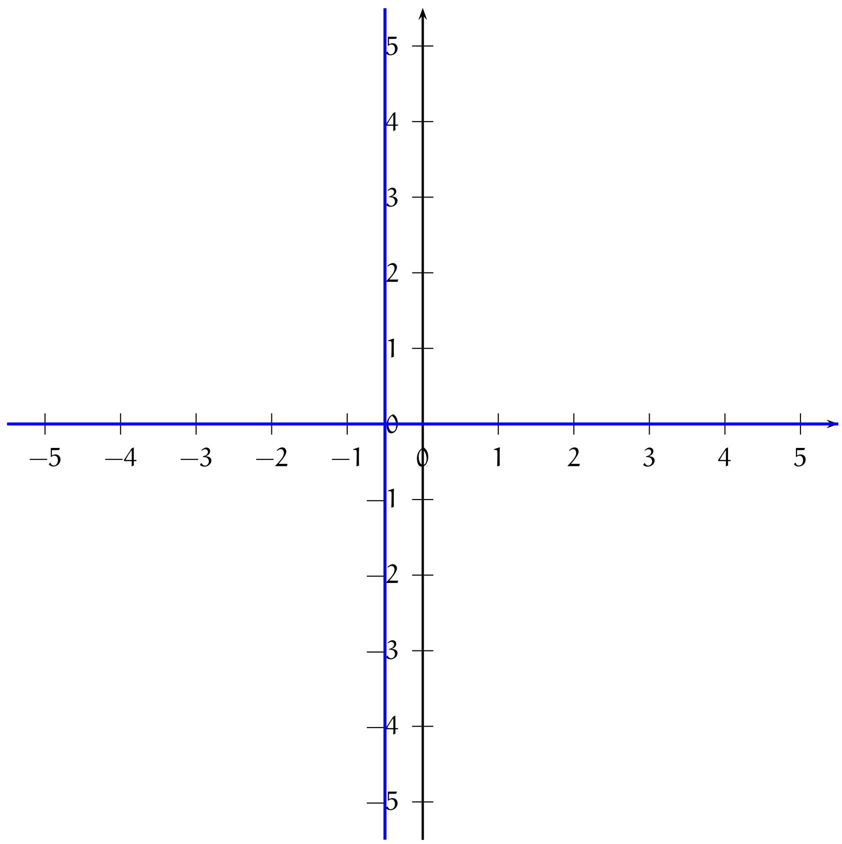
On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 6

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puis $z = a + ib$.

$$z(z+1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z(z+1) = \overline{z(z+1)} \Leftrightarrow z^2 + z - \overline{z}^2 - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overline{z} = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } a = -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z(z+1)$ soit réel est donc la réunion de l'axe des abscisses et de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.



2. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.

$$\begin{aligned} A,\ B \text{ et } C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* /\ \overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* /\ z_C - z_B = \lambda (z_B - z_A) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* /\ \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = \lambda \\ &\Leftrightarrow \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Tout d'abord

- $z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0, 1\}$.
- $z^4 = z \Leftrightarrow z\left(z^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- $z^4 = z^2 \Leftrightarrow z^2\left(z^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1, 0, 1\}$.

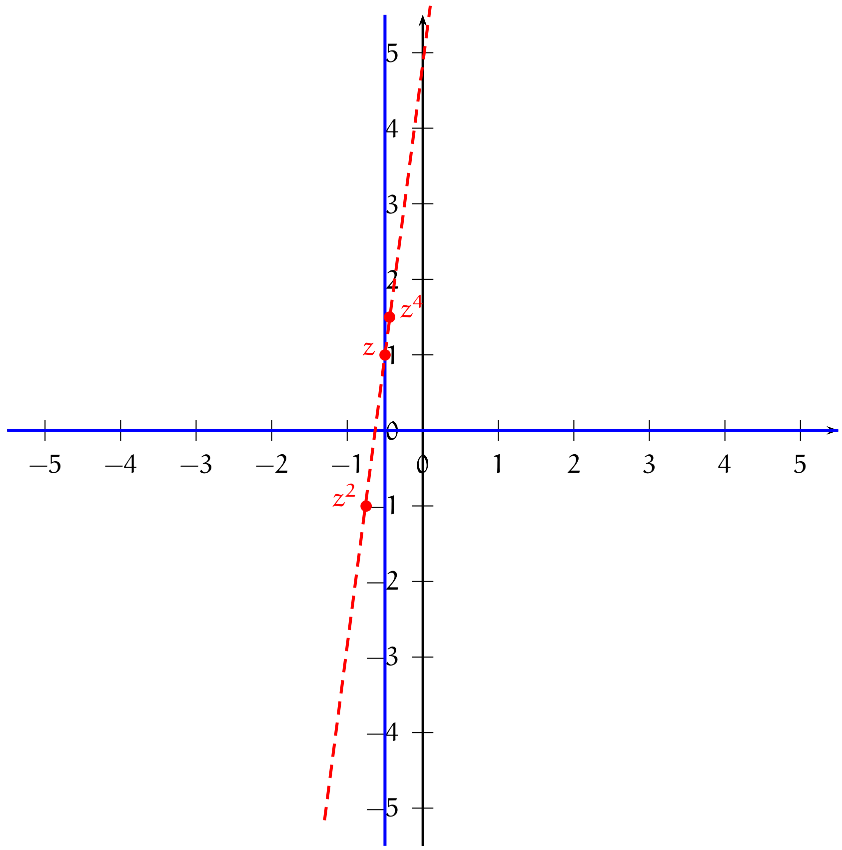
Ainsi, les nombres z, z^2 et z^4 ne sont pas deux à deux distincts si et seulement si $z \in \left\{0, -1, 1, j, j^2\right\}$. Dans ce cas, les points d'affixes respectives z, z^2 et z^4.

Soit $z \notin \left\{0, -1, 1, j, j^2\right\}$. D'après la question précédente, les points d'affixes respectives z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^4 - z^2}{z^2 - z}$ est un réel non nul. Or,

$$\frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} = \frac{z^2(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = z(z+1).$$

D'après la question 1), en récupérant les nombres -1, 0, 1, j et j^2, z est solution du problème si et seulement si l'image de z appartient à la réunion des droites d'équations respectives $y = 0$ et $x = -\dfrac{1}{2}$.

4. Le point solution, d'affixe z, tel que $\mathrm{Im}(z) = 1$ est le point d'affixe $z = -\dfrac{1}{2} + i$. Dans ce cas, $z^2 = -\dfrac{3}{4} - i$ puis $z^4 = \left(z^2\right)^2 = -\dfrac{7}{16} + \dfrac{3}{2}i$. Le graphique suivant montre l'alignement des trois points :



Exercice 7

1. La variable aléatoire X prend les valeurs b (dans le cas où il sort 1 ou 2), 0 (dans le cas où il sort 3) et $-a$ (dans le cas où il sort 4, 5 ou 6). Puisque le dé est équilibré, la loi de probabilité de la variable X est donnée par :

- $P(X = b) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$,
- $P(X = 0) = \dfrac{1}{6}$,
- $P(X = -a) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

L'espérance de X est

$$E(X) = \frac{2}{6} \times b + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{3}{6} \times (-a) = \frac{2b - 3a}{6}.$$

De même, la variable Y prend les valeurs $-b$, 0 et a et sa loi de probabilité est donnée par :

- $P(Y = -b) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$,
- $P(Y = 0) = \dfrac{1}{6}$,
- $P(Y = a) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

L'espérance de Y est

$$E(Y) = \frac{2}{6} \times (-b) + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{3}{6} \times a = \frac{3a - 2b}{6}.$$

2. Puisque quelque soit le tirage un joueur gagne ce que l'autre perd, on a $X + Y = 0$ ou encore $Y = -X$.

3. Par suite, par linéarité de l'espérance, on retrouve le fait que $E(Y) = -E(X)$ puis,

$$E(X) = E(Y) = 0 \Leftrightarrow E(X) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3a}{2}.$$

Le jeu est équitable si et seulement si $b = \dfrac{3a}{2}$.

