ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

JUIN 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in R^2$.

1. Etudier la diagonalisation de A (on précisera les valeurs propres et les sous espaces propres associés).

2. On suppose que $a \neq 0; b \neq 0$, calculer A^n pour $n \in N$.

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel d'équation : $x + y + z = 0$.

4. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au sous espace vectoriel d'équation : $x + y + z = 0$.

Exercice n° 2

Soit $f : R^4 \to R^4$ définie par : $f(x,y,z,t) = (\alpha x + y, x + \alpha y, z + t, z + t)$, où α est un paramètre réel non nul.

1. Déterminer le noyau et l'image de f selon les valeurs de α.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice associée à f selon les valeurs de α (on précisera les valeurs propres).

Exercice n° 3

Soient a et b deux entiers strictement positifs. On considère le polynôme P_n défini par :

$P_n(x) = \dfrac{x^n (bx-a)^n}{n!}$, où $n \in N$.

1. Montrer que le polynôme P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières pour x=0 et $x = a/b$.

2. Etudier la convergence de la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)\,dx$.

3. Montrer que si π était un nombre rationnel et si on prenait a et b des entiers tels que $a/b = \pi$, le nombre I_n serait un entier non nul, en contradiction avec le résultat de la question précédente.

Exercice n° 4

Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \dfrac{Lnt}{t^2-1}\,dt$.

1. Montrer que I est convergente.

2. Pour tout entier naturel k, calculer $J_k = \int_0^1 t^k\, Lnt\, dt$.

3. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = I - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\, Lnt}{t^2-1}\,dt .$$

4. Montrer que l'on peut prolonger par continuité en 0 et 1, la fonction $t \to \dfrac{t^2\, Lnt}{t^2-1}$.

5. Montrer qu'il existe une constante M>0, tel que : $\forall t \in]0,1[, \left|\dfrac{t^2\, Lnt}{t^2-1}\right| \le M$.

6. En déduire que : $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice n° 5

Soient les fonctions réelles f_1 et f_2 définies respectivement par : $f_1(x) = \dfrac{x+2}{2-x}$ et

$f_2(x) = \dfrac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$.

1. Etudier les variations de ces deux fonctions et donner l'allure leurs graphes dans un même repère.

2. Déterminer le point d'intersection des graphes de f_1 et f_2.

3. Trouver deux polynômes différents P_1 et P_2 de même degré n, tels que : $\begin{cases} f_1(x) = P_1(x) + x^n\, e_1(x) \\ f_2(x) = P_2(x) + x^n\, e_2(x) \end{cases}$, où e_1 et e_2 sont des fonctions définies au voisinage de zéro telles que $\underset{x\to 0}{Lim}\, e_1(x) = \underset{x\to 0}{Lim}\, e_2(x) = 0$.

4. Préciser la position relative des deux graphes au voisinage du point $A(0,1)$.

Exercice n° 6

1. On considère une suite (u_n) de nombres réels strictement positifs qui vérifie : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$, où β est une constante réelle. Etudier la convergence de la série de terme général u_n selon les valeurs du paramètre β.

2. Etudier la convergence de la série de terme général : $\frac{1\times 3\times 5.....\times(2n-1)}{2\times 4\times 6....\times(2n)}$.