SESSION 2021

CAPESA

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. A est symétrique réelle et donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.
$A-(a-b)I_3 = b\,(1)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ est une matrice de rang inférieur ou égal à 1 car ses trois colonnes sont identiques. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-(a-b)I_3)) \geqslant 2 > 0$. $a-b$ est donc valeur propre de A, d'ordre de multiplicité au moins égal à 2.

La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de A :

$$(a-b)+(a-b)+\lambda = \mathrm{Tr}(A) = 3a$$

et donc $\lambda = a+2b$. Finalement, $\mathrm{Sp}(A) = (a-b, a-b, a+2b)$. On note que $a-b = a+2b \Leftrightarrow 3b = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

1er cas. Si $b=0$, $A = aI_3$ puis A admet a pour valeur propre d'ordre 3 et le sous-espace propre associé est $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2ème cas. Si $b \neq 0$, A admet $a-b$ pour valeur propre double et $a+2b$ pour valeur propre simple. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $a-b$ a pour équation $b(x+y+z)=0$ ou encore $x+y+z=0$ (car $b\neq 0$). Puisque la matrice A est symétrique réelle, on sait que le sous-espace propre associé à la valeur propre $a+2b$ est l'orthogonal (pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) de $E_{a-b}(A)$ à savoir la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. Puisque $b\neq 0$, nous sommes dans le 2ème cas de la question précédente. Une base orthonormée de $E_{a-b}(A)$ est (u,v) où $u = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. Une base orthonormée de $E_{a+2b}(A)$ est (w) où $w = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Donc,

$$A = PDP^{T} \text{ où } D = \mathrm{diag}(a-b, a-b, a+2b) \text{ et } P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}).$$

Mais alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}A^n = PD^nP^T &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(a-b)^n & 0 & 0\\ 0 & (a-b)^n & 0\\ 0 & 0 & (a+2b)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{(a-b)^n}{\sqrt{2}} & \frac{(a-b)^n}{\sqrt{6}} & \frac{(a+2b)^n}{\sqrt{3}}\\ -\frac{(a-b)^n}{\sqrt{2}} & \frac{(a-b)^n}{\sqrt{6}} & \frac{(a+2b)^n}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2(a-b)^n}{\sqrt{6}} & \frac{(a+2b)^n}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et donc $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(a-b)^n+(a+2b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n \\ (a+2b)^n-(a-b)^n & 2(a-b)^n+(a+2b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n \\ (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n & 2(a-b)^n+(a+2b)^n \end{pmatrix}$. Cette égalité reste vraie quand $n=0$ si de plus $a-b\neq 0$ et $a+2b\neq 0$.

3. On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique que l'on note $\langle\ ,\ \rangle$. Le plan F d'équation $x+y+z=0$ admet le vecteur unitaire w pour vecteur normal. On sait que pour tout $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (en notant p_w la projection orthogonale sur w),

$$p_w(x,y,z)=\langle w,a\rangle w=\frac{x+y+z}{3}(1,1,1)\,.$$

Mais alors, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (en notant p_F la projection orthogonale sur F),

$$p_F(x,y,z)=(x,y,z)-p_w(x,y,z)=\frac{1}{3}(2x-y-z,-x+2y-z,-x-y+2z).$$

En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. En notant s_F la symétrie orthogonale par rapport au plan F,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F)=2\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F)-I_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t)\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha x+y=0\\ x+\alpha y=0\\ z+t=0\end{array}\right..$$

Le déterminant du système formé par les deux premières équations est $\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2-1$.

1er cas. Si $\alpha\notin\{-1,1\}$, alors $\alpha^2-1\neq 0$ et le système formé par les deux premières équations admet l'unique solution $(x,y)=(0,0)$. Dans ce cas,

$$\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,z,-z),\ z\in\mathbb{R}\}.$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1 et donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f))=4-1=3$.
$e'_1=f(e_1)=(\alpha,1,0,0)$, $e'_2=f(e_2)=(1,\alpha,0,0)$ et $e'_3=f(e_3)=(0,0,1,1)$ sont trois vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$. Vérifions que la famille (e'_1,e'_2,e'_3) est libre. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$ae'_1+be'_2+ce'_3=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha a+b=0\\ a+\alpha b=0\\ c=0\end{array}\right.\Rightarrow a=b=c=0$$

(car $\alpha^2-1\neq 0$). (e'_1,e'_2,e'_3) est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ de cardinal $3=\dim(\mathrm{Im}(f))<+\infty$. Donc, la famille (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(\alpha e_1+e_2,e_1+\alpha e_2,e_3+e_4)\,.$$

On note que $\mathrm{Vect}(\alpha e_1+e_2,e_1+\alpha e_2)\subset\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ puis $\mathrm{Vect}(\alpha e_1+e_2,e_1+\alpha e_2)=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ par égalité des dimensions. On a donc aussi $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3+e_4)$.

2ème cas. Si $\alpha\in\{-1,1\}$, alors $x+\alpha y=0\Leftrightarrow\alpha(x+\alpha y)=0\Leftrightarrow\alpha x+y=0$ (car $\alpha^2=1$). Dans ce cas,

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\alpha x \\ t = -z \end{array} \right. ,$$

puis,

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, -\alpha x, z, -z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

En particulier, $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 d'après le théorème du rang.
$e_1' = f(e_1) = (\alpha, 1, 0, 0)$ et $e_3' = f(e_3) = (0, 0, 1, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$ et donc (e_1', e_3') est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(\alpha e_1 + e_2, e_3 + e_4)\,.$$

2. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice M est symétrique réelle et donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral. Un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned} \chi_M &= \begin{vmatrix} \alpha - X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha - X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - X & 1 \\ 1 & \alpha - X \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 - X & 1 \\ 1 & 1 - X \end{vmatrix} \\ &= \left((X-\alpha)^2 - 1\right)\left((X-1)^2 - 1\right) = (X - \alpha - 1)(X - \alpha + 1)X(X-2). \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Sp}(M) = (\alpha+1, \alpha-1, 0, 2)$ puis M est semblable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(\alpha+1, \alpha-1, 0, 2)$.

On note que $\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$, $\alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$, $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$. Donc, si $\alpha \notin \{-1, 1, 3\}$, M est à valeurs propres simples.

Si $\alpha = 1$, $\mathrm{Sp}(M) = (2, 0, 0, 2)$ puis M est semblable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(2, 0, 0, 2)$.
Si $\alpha = -1$, $\mathrm{Sp}(M) = (0, -2, 0, 2)$ puis M est semblable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(0, -2, 0, 2)$.
Si $\alpha = 3$, $\mathrm{Sp}(M) = (4, 2, 0, 2)$ puis M est semblable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(4, 2, 0, 2)$.

Exercice 3

1. $P_0 = 1$ et donc P_0 ainsi que toutes ses dérivées (qui sont nulles) prennent des valeurs entières en 0 et en $\dfrac{a}{b}$.

Dorénavant, $n \geqslant 1$. 0 est racine de P_n d'ordre n et donc, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, 0 est racine d'ordre $n-k$ de $P_n^{(k)}$. En particulier, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, 0 est racine de $P_n^{(k)}$ et donc $P_n^{(k)}(0) = 0$ puis $P_n^{(k)}(0)$ est un entier relatif.
D'autre part, P_n est un polynôme de degré $2n$ et donc, si $k > 2n$, $P_n^{(k)} = 0$. Dans ce cas aussi, $P_n^{(k)}(0)$ est un entier relatif.

Soit $k \in [\![n, 2n]\!]$. La formule du binôme de Newton fournit

$$P_n = \frac{X^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} C_n^i (bX)^i (-a)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^i b^i (-a)^{n-i} X^{n+i} = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{n!} C_n^{i-n} b^{i-n} (-a)^{2n-i} X^i.$$

On sait alors que

$$P_n^{(k)}(0) = k! \times \frac{1}{n!} C_n^{k-n} b^{k-n} (-a)^{2n-k}.$$

Puisque $k \geqslant n$, $\dfrac{k!}{n!} \in \mathbb{N}$ puis $k! \times \dfrac{1}{n!} C_n^{k-n} b^{k-n} (-a)^{2n-k} \in \mathbb{Z}$ et encore une fois $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

On a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Ensuite, pour tout réel x,

$$P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(b\left(\frac{a}{b} - x\right) - a\right)^n = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (-bx)^n = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!} = P_n(x).$$

newpage CAPESA 2021 - ISE option maths - Mathématiques 2 - Corrigé

Soit $k \in \mathbb{N}$. En dérivant k fois l'égalité précédente, on obtient pour tout réel x, $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}-x\right) = (-1)^n P_n^{(k)}(x)$ et en particulier, $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = (-1)^n P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs.

2. La fonction $f\ :\ x \mapsto x(bx-a)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et en particulier, cette fonction est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|I_n| \leqslant \int_0^\pi \frac{|x(bx-a)|^n}{n!}\sin(x)\ dx \leqslant \int_0^\pi \frac{M^n}{n!}\times 1\ dx = \frac{\pi M^n}{n!}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi M^n}{n!} = 0$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. $I_0 = 2$ est un entier. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence (finie) que pour tout $k \in [\![1,2n]\!]$, il existe $\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{k-1},\varepsilon'_0,\ldots,\varepsilon'_{k-1}\right) \in \{-1,0,1\}^{2k}$ tel que

$$I_n = \sum_{i=0}^{k-1}\left(\varepsilon_i P_n^{(i)}(0) + \varepsilon'_i P_n^{(i)}(\pi)\right) + (-1)^k \int_0^\pi P_n^{(k)}(x)\sin\left(x - \frac{k\pi}{2}\right) dx.$$

- Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)\ dx = \left[P_n(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi P'_n(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ dx \\ &= P_n(0) + P_n(\pi) - \int_0^\pi P'_n(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ dx. \end{aligned}$$

Le résultat est vrai quand $k=1$ en prenant $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 = 1$.

- Soit $k \in [\![1,2n-1]\!]$. Supposons le résultat pour k. Une nouvelle intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_n^{(k)}(x)\sin\left(x-\frac{k\pi}{2}\right) dx &= \left[P_n^{(k)}(x)\sin\left(x-\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(k+1)}(x)\sin\left(x-\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\ dx \\ &= \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right)P_n^{(k)}(0) + \sin\left(\frac{(k-1)\pi}{2}\right)P_n^{(k)}(\pi) - \int_0^\pi P_n^{(k+1)}(x)\sin\left(x-\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\ dx \end{aligned}$$

puis $I_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left(\varepsilon_i P_n^{(i)}(0) + \varepsilon'_i P_n^{(i)}(\pi)\right) + (-1)^{k+1}\int_0^\pi P_n^{(k+1)}(x)\sin\left(x-\frac{(k+1)\pi}{2}\right) dx$ en prenant $\varepsilon_k = (-1)^k \sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right) \in \{-1,0,1\}$ et $\varepsilon'_k = (-1)^k\sin\left(\dfrac{(k-1)\pi}{2}\right) \in \{-1,0,1\}$.

Le résultat est démontré par récurrence. En particulier, en tenant compte de $\deg(P_n) = 2n$ et donc $P_n^{(2n+1)} = 0$,

$$I_n = \sum_{i=0}^{2n}\left(\varepsilon_i P_n^{(i)}(0) + \varepsilon'_i P_n^{(i)}(\pi)\right).$$

D'après la question 1) (en tenant compte de $\pi = \dfrac{a}{b}$), cette égalité montre que I_n est un entier relatif.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^n I_n = \int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin(x)\ dx = \frac{b^n}{n!}\int_0^\pi x^n\left(\frac{a}{b}-x\right)^n \sin(x)\ dx = \frac{b^n}{n!}\int_0^\pi (x(\pi-x))^n\sin(x)\ dx.$$

La fonction $x \mapsto (x(\pi-x))^n\sin(x)$ est continue, positive et non nulle sur $[0,\pi]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^\pi (x(\pi-x))^n\sin(x)\ dx > 0$ puis que $(-1)^n I_n > 0$. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un entier naturel non nul.

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|I_n| \geqslant 1$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On a montré par l'absurde que le nombre π est irrationnel.

Exercice 4

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$. Par suite, l'intégrale I converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $]0,1[$.

• $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ puis, $\sqrt{t}f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\sqrt{t}\ln(t) \underset{t\to 0}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $f(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$. Puisque $-\dfrac{1}{2} > -1$, la fonction $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite et il en est de même de la fonction f.

• $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} = \dfrac{1}{t+1} \times \dfrac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 1 et en particulier la fonction f est intégrable sur un voisinage de 1.

En résumé, la fonction f est continue sur $]0,1[$, intégrable sur un voisinage de 0 et intégrable sur un voisinage de 1. f est donc intégrable sur $]0,1[$ ou encore l'intégrale I est une intégrale convergente.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 t^k \ln(t)\,dt &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t}\,dt = -\frac{\varepsilon^{k+1}\ln(\varepsilon)}{k+1} + \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k\,dt \\ &= \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2} - \frac{\varepsilon^{k+1}\ln(\varepsilon)}{k+1}.\end{aligned}$$

Ensuite, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{k+1}\ln(\varepsilon) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Quand ε tend vers 0, on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale J_k :

$$J_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \in [0,1[$, on a $t^2 \neq 1$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(t^2\right)^k = \frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2}$ puis pour tout réel $t \in]0,1[$,

$$-\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln(t) = \frac{\ln(t)}{t^2-1} - \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}.$$

Les fonctions $t \mapsto -t^{2k}\ln(t)$, $k \in [\![0,n]\!]$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ sont intégrables sur $]0,1[$ et il en est donc de même de la fonction $t \mapsto -\dfrac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}$. En intégrant sur $]0,1[$, on obtient

$$I - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\,dt = -\sum_{k=0}^{n} J_{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} t^2\ln(t) = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$. D'autre part, $g(t) = \dfrac{t^2\ln(t)}{(t+1)(t-1)} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{t\to 1} g(t) = \dfrac{1}{2}$. La fonction g est prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = \dfrac{1}{2}$ (on note encore g le prolongement obtenu).

5. La (nouvelle) fonction g est définie et continue sur le segment $[0,1]$. La fonction g est en particulier bornée sur ce segment. Soit $M > 0$ un majorant de la fonction $|g|$ sur $[0,1]$. Alors en particulier,

$$\forall t \in]0,1[,\ \left|\frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}\right| \leqslant M.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\ dt \right| = \left| \int_0^1 t^{2n} g(t)\ dt \right| \leqslant \int_0^1 t^{2n}|g(t)|\ dt \leqslant M \int_0^1 t^{2n}\ dt = \frac{M}{2n+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M}{2n+1} = 0$, on en déduit que $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Si on sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on a

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

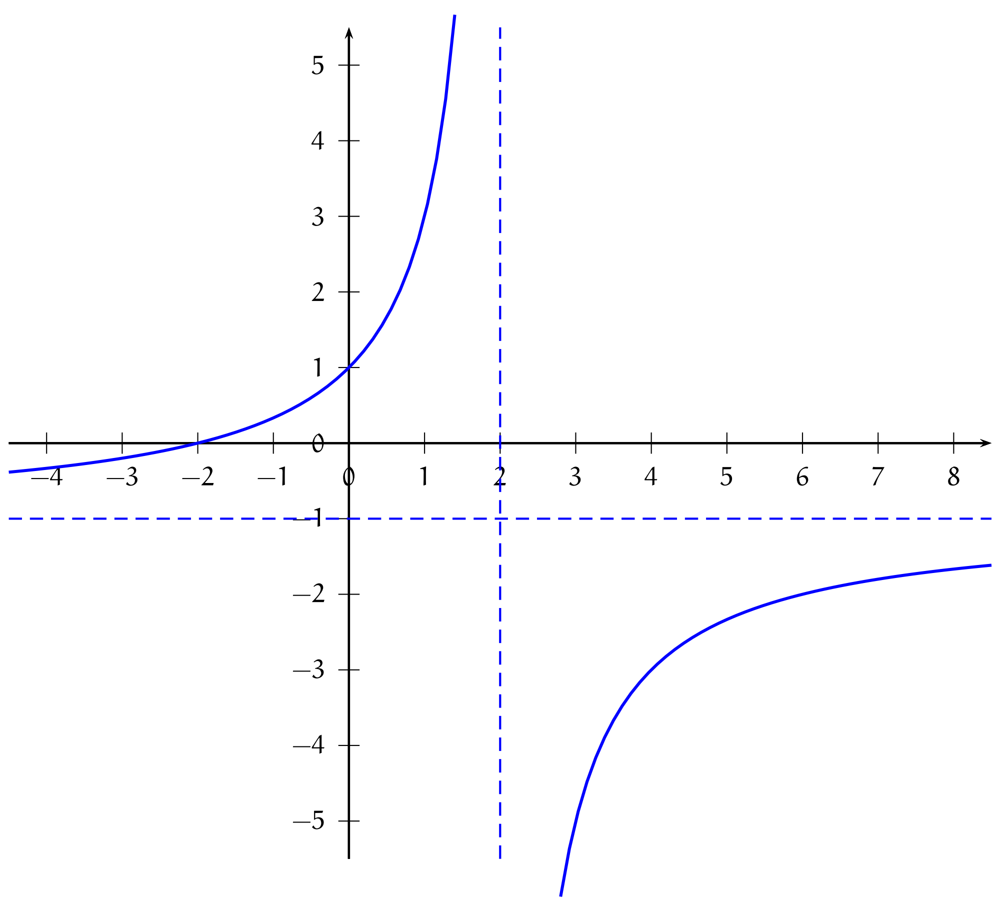
et donc

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 5

1. La fonction f_1 est une fonction homographique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et pour tout réel $x \neq 2$, $f_1'(x) = \frac{4}{(2-x)^2}$. La fonction f_1' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$). Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -1 = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$ et d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f_1(x) = -\infty$. On sait enfin que le point de coordonnées $(2, -1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_{f_1}$.

Graphe de f_1 :



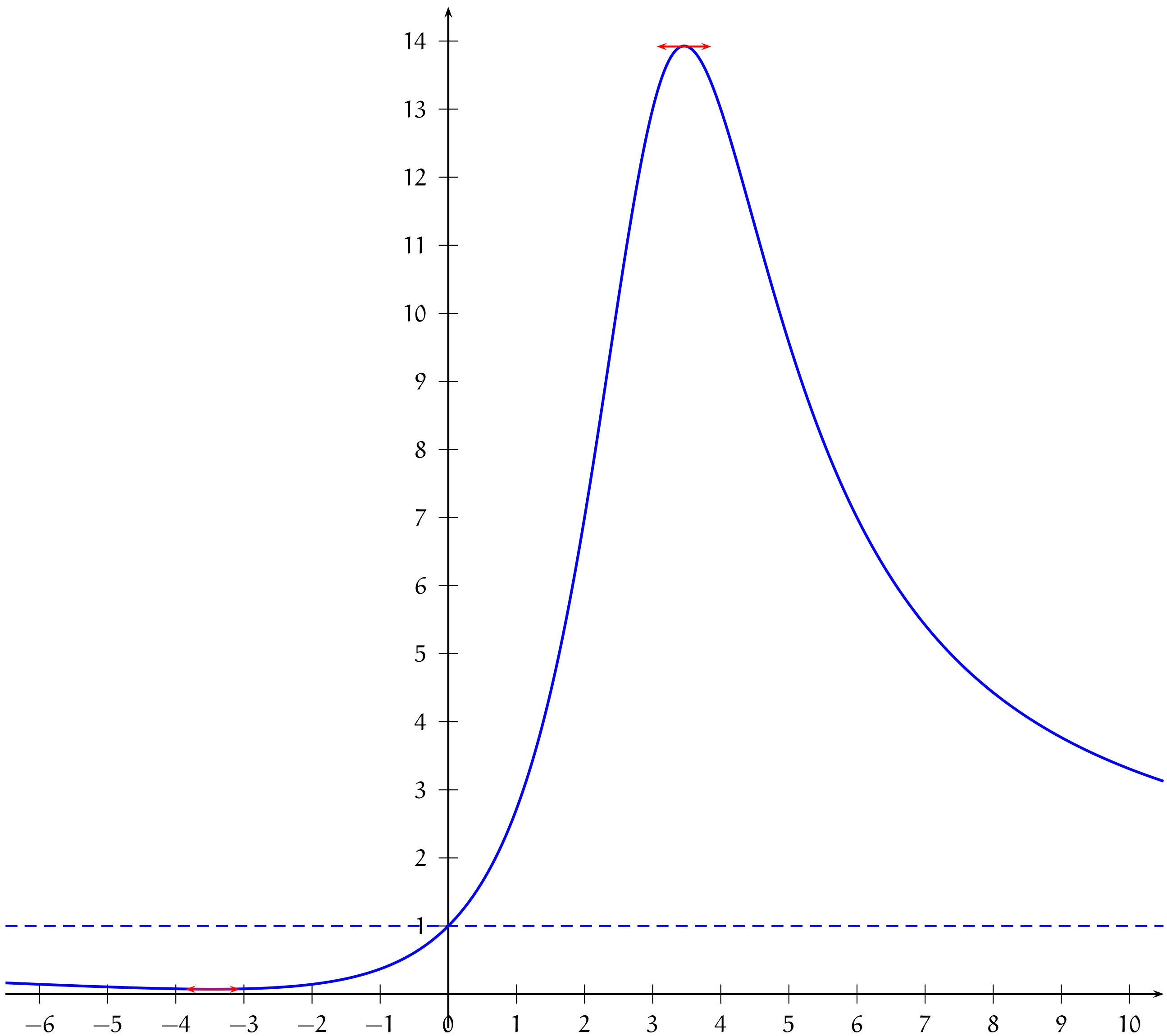
Le discriminant réduit du trinôme $x^2 - 6x + 12$ est $\Delta' = (-3)^2 - 12 = -3 < 0$. Ce trinôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc la fraction rationnelle f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f_2'(x) = \frac{(2x+6)\left(x^2-6x+12\right) - \left(x^2+6x+12\right)(2x-6)}{\left(x^2-6x+12\right)^2} = \frac{-12x^2+144}{\left(x^2-6x+12\right)^2} = \frac{-12\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)}{\left(x^2-6x+12\right)^2}.$$

La fonction f_2 est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -2\sqrt{3}\right]$, strictement croissante sur $\left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[2\sqrt{3}, +\infty\right[$. Ensuite, $f_2(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ et $f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

Enfin, $2\sqrt{3} = 3,46\ldots$ puis $f_2\left(-2\sqrt{3}\right) = \dfrac{12-12\sqrt{3}+12}{12+12\sqrt{3}+12} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2^2-3} = 7-4\sqrt{3} = 0,07\ldots$ et $f_2\left(2\sqrt{3}\right) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3} = 13,92\ldots$.

Graphe de f_2 :



2. Soit x un réel différent de 2.

$$f_2(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+12} = \frac{x+2}{-x+2} \Leftrightarrow \left(x^2+6x+12\right)(-x+2) = \left(x^2-6x+12\right)(x+2)$$
$$\Leftrightarrow -x^3-4x^2+24 = x^3-4x^2+24 \Leftrightarrow 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Les graphes de f_1 et f_2 ont un point commun et un seul, le point de coordonnées $(0, 1)$.

3. Il s'agit de faire un développement limité en 0 des fonctions f_1 et f_2 à un ordre suffisant pour que les parties régulières de ces développements aient au moins un coefficient différent.

Tentative à l'ordre 1.

$$f_1(x) = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} \underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x)$$

et

$$f_2(x) = \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}} \underset{x \to 0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x)}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} \underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x).$$

L'ordre 1 est insuffisant.

Tentative à l'ordre 2.

$$f_1(x) = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} \underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

et

$$\begin{aligned}
f_2(x) = \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)} &\underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}\right)\left(1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)x^2 + o\left(x^2\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

L'ordre 2 est insuffisant.

Tentative à l'ordre 3.

$$f_1(x) \underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right)$$

et

$$\begin{aligned}
f_2(x) &\underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}\right)\left(1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right)x^3 + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

L'ordre 3 convient.

4. $f_1(x) - f_2(x) \underset{x \to 0}{=} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)x^2 + o\left(x^2\right)$ puis $f_1(x) - f_2(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^3}{12}$. Au voisinage de 0, la différence $f_1(x) - f_2(x)$ est du signe de $\frac{x^3}{12}$ et donc le graphe de la fonction f_1 est au-dessus du graphe de la fonction f_2 au voisinage de 0 à droite et le graphe de la fonction f_1 est au-dessous du graphe de la fonction f_2 au voisinage de 0 à gauche.

Exercice 6

1. On reconnaît la règle de Raabe-Duhamel : si $\beta > 1$, la série de terme général u_n converge, si $\beta < 1$, la série de terme général u_n diverge et si $\beta = 1$, tout est possible et on ne peut rien dire de la convergence de la série de terme général u_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puisque $\dfrac{1}{2} < 1$, la série de terme général u_n diverge d'après la règle de Raabe-Duhamel.

