ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

JUIN 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

On note $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels. On note $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $x \in [a,b]$ et tout réel $r > 0$, on note $B(x,r) = \{y \in [a,b] : |y-x| < r\}$ la boule ouverte centrée en x de rayon r, intersectée avec l'ensemble $[a,b]$.

Partie 1.1

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Soit $x \in [a,b]$, on pose
$$E_x = \{y \in [a,b] : f(y) \leq f(x)\}$$
l'ensemble des réels $y \in [a,b]$ tels que l'image par f est inférieure à $f(x)$. Montrer que
$$E_x = f^{-1}(]-\infty, f(x)])$$
c'est-à-dire que E_x est l'image réciproque de $]-\infty, f(x)]$ par la fonction f.
2. Montrer que E_x est une partie fermée de $[a,b]$.
3. En déduire que E_x est une partie compacte.
4. Soient x et $y \in [a,b]$. Montrer que si $E_x = E_y$ alors $f(x) = f(y)$.
5. On construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $E_{x_n} \subset E_{x_{n+1}}$. Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

6. On pose $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ la borne supérieure de f. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a $E_x \subset f^{-1}(]-\infty, M])$.
7. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a, b]$, on pose

$$V_x^\varepsilon(f) = \{y \in [a,b] : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$$

l'ensemble des réels $y \in [a, b]$ tels que l'image par f est proche de $f(x)$ à ε près. Montrer que

$$V_x^\varepsilon(f) = f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[).$$

8. Montrer que $V_x^\varepsilon(f)$ est une partie ouverte de $[a, b]$.
9. Construire une fonction $h \in \mathcal{C}^0$ telle qu'il existe $x^* \in [a, b]$ avec $V_{x^*}^\varepsilon(h)$ qui n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$.
10. Soit g une fonction définie sur $[a, b]$ qui vérifie la propriété suivante :

Propriété (P)**.** *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$*

$$y \in B(x, r) \Longrightarrow y \in V_x^\varepsilon(g).$$

Montrer que la fonction g est continue.
11. Soit f une fonction dérivable telle que $f' \in \mathcal{C}^0$. Montrer qu'elle vérifie la propriété (P).
12. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. On suppose que f ne vérifie pas la propriété (P) pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé. Construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]$ telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - y_n| < (b - a)2^{-n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

13. Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0$. Montrer que f vérifie la propriété (P).

Partie 1.2

14. Rappeler la formule des coefficients de Newton $(C_n^k)_{0 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}}$ tels que pour tous réels x et y et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a l'identité

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

15. Montrer que pour tout $z \in [a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k (z - a)^k (b - z)^{n-k} = n(z - a)(b - a)^{n-1}.$$

16. Montrer que pour tout $z \in [a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k (z - a)^k (b - z)^{n-k} = n(n - 1)(z - a)^2 (b - a)^{n-2}.$$

17. Montrer que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n+1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\dots(k-p+1)C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} = n(n-1)\dots(n-p+1)(z-a)^p(b-a)^{n-p}.$$

18. Montrer que

$$(k(b-a)-n(z-a))^2 = (b-a)^2(k(k-1)) + (b-a)^2k - 2n(b-a)(z-a)k + n^2(z-a)^2.$$

19. En déduire que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(k(b-a)-n(z-a))^2C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} = n(z-a)(b-z)(b-a)^n.$$

20. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r > 0$, pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ vérifiant $\left|a + \frac{k}{n}(b-a) - z\right| \geq r$, on a

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leq C\frac{(na+k(b-a)-nz)^2}{n^2r^2}.$$

21. Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ on a

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leq \varepsilon + C\frac{(na+k(b-a)-nz)^2}{n^2r^2}.$$

22. En déduire qu'il existe une constante $D > 0$ ne dépendant que de la fonction f telle que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)C_n^k\frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}\right| \quad \leq \quad \varepsilon + \frac{D}{nr^2}.$$

2 Problème d'algèbre

Soit V un endomorphisme sur l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$. Les compositions successives de l'endomorphisme V seront notées V^m pour tout $m \in \mathbb{N}$, avec la convention V^0 étant l'endomorphisme identité.

Partie 2.1

On pose V l'endomorphisme suivant

$$\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2}P\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{X+1}{2}\right). \end{array}$$

1. Montrer que pour tout polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$, $V(P)$ est également un polynôme de degré au plus $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n l'application

$$\begin{array}{rcl} V_n : \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{X}{2}\right) + \dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{X+1}{2}\right) \end{array}$$

définie sur le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. Montrer que V_n est bien un endomorphisme.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $v_{n,m} := \dim(\text{Ker } V_n^m) + \text{rang}(V_n^m)/2$ pour $m \in \mathbb{N}$ est croissante.
4. Montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge quand $m \to +\infty$.
5. Donner la matrice M de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui représente l'endomorphisme V_2 dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. En déduire Ker V_2 et Im V_2.

Partie 2.2

A partir de cette question, et jusqu'à la fin du problème, on fixe $n = 2$. On cherche à étudier la limite d'endomorphisme V_2^m pour $m \to +\infty$.

7. Calculer la limite de $v_{2,m}$ quand $m \to +\infty$.
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ qui diagonalise l'endomorphisme V_2.
9. Calculer les valeurs propres de l'endomorphisme V_2 et les vecteurs propres associés.
10. Calculer la matrice de passage $\mathcal{P}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
11. Calculer l'inverse de la matrice $\mathcal{P}$.
12. Donner la matrice Δ de V_2 dans la base $\mathcal{C}$.
13. Soit $Q = cX^2 + bX + a$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{C}$.
14. Calculer la matrice qui représente l'endomorphisme V_2^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ dans la base canonique.
15. Montrer que les coordonnées de $V_2^m(Q)$ dans la base $\mathcal{C}$ convergent.
16. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. On note $|||\cdot|||$ la norme d'endomorphisme associée, c'est-à-dire que pour tout endomorphisme V on définit

$$|||V||| := \max_{Q\in\mathbb{R}_2[X], Q\neq 0} \frac{\|V(Q)\|}{\|Q\|}.$$

Montrer que $|||V_2||| \geq 1$.
17. Montrer qu'il existe un endomorphisme U de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$\|V_2^m(Q) - U(Q)\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

18. Donner la matrice de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui représente l'endomorphisme U dans la base $\mathcal{C}$.
19. Calculer le rang de la matrice qui représente l'endomorphisme U dans la base $\mathcal{C}$.
20. En déduire si la suite $v_{2,m} = \dim(\text{Ker } V_2^m) + \text{rang}(V_2^m)/2$ converge ou non vers $\dim(\text{Ker } U) + \text{rang(U)}/2$.