SESSION 2021

CAPESA

PREMIERE COMPOSITION

---

1 - Problème d'analyse

Partie 1.1

1. On rappelle que si E et F sont deux ensembles non vides et f une application de E vers F, pour toute partie A de F,

$$\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A.$$

Soit $x \in [a,b]$. Pour tout $y \in [a,b]$, $y \in E_x \Leftrightarrow f(y) \leqslant f(x) \Leftrightarrow f(y) \in]-\infty, f(x)] \Leftrightarrow y \in f^{-1}(]-\infty, f(x)])$. Donc,

$$\forall x \in [a,b],\ E_x = f^{-1}(]-\infty, f(x)]).$$

2. Soit $x \in [a,b]$. $]-\infty, f(x)]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire $]f(x), +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Puisque la fonction f est continue sur $[a,b]$, l'image réciproque du fermé $]-\infty, f(x)]$ par la fonction continue f est un fermé de $[a,b]$, c'est-à-dire l'intersection d'un fermé de $\mathbb{R}$ avec $[a,b]$.

3. Soit $x \in [a,b]$. $E_x \subset [a,b]$ et en particulier E_x est borné. Ainsi, E_x est un fermé borné de $[a,b]$ et donc E_x est un compact d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

4. Soit $(x,y) \in [a,b]^2$ tel que $E_x = E_y$. x est un élément de $[a,b]$ et $f(x) \leqslant f(x)$. Donc, $x \in E_x$. Mais alors $x \in E_y$ puis $f(x) \leqslant f(y)$. De même, $y \in E_x$ et donc $f(y) \leqslant f(x)$. Finalement, $f(x) = f(y)$. On a montré que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ E_x = E_y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. $x_n \in E_{x_n}$ et donc $x_n \in E_{x_{n+1}}$. Mais alors, par définition de $E_{x_{n+1}}$, $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$ et donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

6. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et donc la fonction f admet sur $[a,b]$ un maximum et un minimum. En particulier, M existe dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in [a,b]$. Pour tout $y \in E_x$, $f(y) \leqslant f(x) \leqslant M$ puis $f(y) \in]-\infty, M]$ et donc $y \in f^{-1}(]-\infty, M])$. Ceci montre que $E_x \subset f^{-1}(]-\infty, M])$.

7. Soit $x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $y \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} y \in V_x^\varepsilon(f) &\Leftrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon \Leftrightarrow f(y) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\\ &\Leftrightarrow y \in f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[). \end{aligned}$$

Donc, $V_x^\varepsilon = f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)$.

8. Soit $x \in [a,b]$. $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et f est continue sur $[a,b]$. Donc, $V_x^\varepsilon = f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)$ est un ouvert de $[a,b]$ (en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue) c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}$ avec $[a,b]$.

9. Soit h la fonction $\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$. La fonction h est continue sur $[a,b]$. Soit $x^* = \dfrac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} + 1$. Pour tout $y \in [a,b]$, $y \in V_{x^*}^\varepsilon = [a,b]$. $[a,b]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ (mais est un ouvert de $[a,b]$).

10. Soit $x \in [a,b]$. Montrons que la fonction g est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que, pour tout y de $[a,b]$,

$$|y - x| < r \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

En résumé : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0 /\ \forall y \in [a,b],\ (|y - x| < r \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$. La fonction g est donc continue en x.

Puisque la fonction g est continue en tout réel x de $[a,b]$, la fonction g est continue sur $[a,b]$.

11. Attention, la propriété (P) est plus forte que la propriété : « f est continue sur $[a,b]$ » (auquel cas on écrirait simplement : f dérivable $\Rightarrow$ f continue) car le réel $r>0$ est fourni indépendamment de x (c'est le même réel r pour tout les x).

La fonction f est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est continue sur le segment $[a,b]$. La fonction f' est donc bornée sur le segment $[a,b]$. Soit M un réel strictement positif, majorant la fonction $|f'|$ sur le segment $[a,b]$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall(x,y)\in[a,b]^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|.$$

Soit alors $\varepsilon>0$. Soit $r=\dfrac{\varepsilon}{M}$. Soit $(x,y)\in[a,b]^2$. Puisque $|f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|$ et que $M>0$,

$$y\in B(x,r)\Rightarrow|y-x|<r\Rightarrow|f(y)-f(x)|<M\times r\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow y\in V_x^{\varepsilon}(f).$$

On a montré que : $\forall\varepsilon>0,\ \exists r>0/\ \forall(x,y)\in[a,b]^2,\ (y\in B(x,r)\Rightarrow y\in V_x^{\varepsilon}(f))$.
Donc, la fonction f vérifie la propriété (P).

12. On suppose que : $\exists\varepsilon>0/\ \forall r>0,\ \exists(x,y)\in[a,b]^2/\ (y\in B(x,r)$ et $y\notin V_x^{\varepsilon}(f))$. ε est ainsi dorénavant fixé.

On applique ce qui précède aux réels de la forme $r_n=\dfrac{b-a}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists\,(x_n,y_n)\in[a,b]^2/\ \left(y_n\in B\left(x_n,\frac{b-a}{2^n}\right)\text{ et }y_n\notin V_{x_n}^{\varepsilon}(f)\right).$$

Maintenant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la condition $y_n\in B\left(x_n,\dfrac{b-a}{2^n}\right)$ s'écrit encore $|y_n-x_n|<\dfrac{b-a}{2^n}$ et la condition $y_n\notin V_{x_n}^{\varepsilon}(f)$ s'écrit encore $|f(y_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon$. On a donc montré qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists\,(x_n,y_n)\in[a,b]^2/\ \left(|x_n-y_n|<\frac{b-a}{2^n}\text{ et }|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon\right).$$

13. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$ (attention, il n'y a aucune raison a priori que les suites (x_n) et (y_n) convergent). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de réels. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Posons $x=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_{\varphi(n)}$.

La suite $\left(x_{\varphi(n)}-y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $(x_n-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc la suite $\left(x_{\varphi(n)}-y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a même limite, à savoir 0. Enfin, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y_{\varphi(n)}=x_{\varphi(n)}-\left(x_{\varphi(n)}-y_{\varphi(n)}\right)$, la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite x.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_{\varphi(n)}=\lim_{n\to+\infty}y_{\varphi(n)}=x$. Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a\leqslant x_{\varphi(n)}\leqslant x$ puis, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $a\leqslant x\leqslant b$. Puisque la fonction f est continue sur $[a,b]$, la fonction f est en particulier continue en x. Mais alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f\left(x_{\varphi(n)}\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}x_{\varphi(n)}\right)=f(x)$ et de même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f\left(y_{\varphi(n)}\right)=f(x)$ et finalement

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right)=0.$$

Ceci en en contradiction avec : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right|\geqslant\varepsilon$ (pour un certain $\varepsilon>0$). Il était donc absurde de supposer que le fonction f ne vérifie pas la propriété (P).

On a montré que, sous l'hypothèse f est continue sur le segment $[a,b]$, la fonction f vérifie la propriété (P).

Partie 1.2

14. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

15. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

$$kC_n^k=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=nC_{n-1}^{k-1}.$$

Mais alors, pour tout $z\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kC_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1}(z-a)^k(b-z)^{n-k} \\
&= n(z-a)\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}(z-a)^{k-1}(b-z)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= n(z-a)\sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'}(z-a)^{k'}(b-z)^{(n-1)-k'} \text{ (en posant } k'=k-1) \\
&= n(z-a)((z-a)+(b-z))^{n-1} \text{ (d'après la formule du binôme de Newton)} \\
&= n(z-a)(b-a)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $n=0$ et donc,

$$\forall z\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} kC_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} = n(z-a)(b-a)^{n-1}.$$

Autre solution. Soit $z\in[a,b]$ fixé. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $P(t)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(t-a)^k(b-z)^{n-k}$. Alors, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\forall t\in\mathbb{R},\ P(t)=(t-a+b-z)^n.$$

En dérivant, on obtient pour tout réel t, $n(t-a+b-z)^{n-1}=P'(t)=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k(t-a)^{k-1}(b-z)^{n-k}$ puis

$$n(t-a)(t-a+b-z)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k(t-a)^k(b-z)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k(t-a)^k(b-z)^{n-k}.$$

On obtient alors de nouveau le résultat en appliquant l'égalité précédente au réel $t=z$.

16. L'égalité est vraie quand $n=0$ ou $n=1$. Dorénavant, $n\geqslant 2$. Soit $k\in[\![2,n]\!]$.

$$k(k-1)C_n^k=\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}=n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!}=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

puis, pour tout $z\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)C_{n-2}^{k-2}(z-a)^k(b-z)^{n-k} \\
&= n(n-1)(z-a)^2\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2}(z-a)^{k-2}(b-z)^{(n-2)-(k-2)} \\
&= n(n-1)(z-a)^2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k}(z-a)^{k}(b-z)^{(n-2)-k} \\
&= n(n-1)(z-a)^2(z-a+b-z)^{n-2} = n(n-1)(z-a)^2(b-a)^{n-2}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall z\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k}=n(n-1)(z-a)^2(b-a)^{n-2}.$$

17. Soient n et p des entiers naturels tels que $1\leqslant p\leqslant n+1$. Soit $k\in[\![p,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
k(k-1)\dots(k-(p-1))C_n^k &= k(k-1)\dots(k-(p-1))\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-p)!(n-k)!} \\
&= n(n-1)\dots(n-(p-1))\frac{(n-p)!}{(k-p)!((n-p)-(k-p))!}=n(n-1)\dots(n-(p-1))C_{n-p}^{k-p}.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $z \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\dots(k-(p-1))C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} &= \sum_{k=p}^{n} k(k-1)\dots(k-(p-1))C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k}\\ &= \sum_{k=p}^{n} n(n-1)\dots(n-(p-1))C_{n-p}^{k-p}(z-a)^k(b-z)^{n-k}\\ &= n(n-1)\dots(n-(p-1))(z-a)^p\sum_{k=p}^{n} C_{n-p}^{k-p}(z-a)^{k-p}(b-z)^{(n-p)-(k-p)}\\ &= n(n-1)\dots(n-(p-1))(z-a)^p\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^{k}(z-a)^{k}(b-z)^{(n-p)-k}\\ &= n(n-1)\dots(n-(p-1))(z-a)^p(z-a+b-z)^{n-p}\\ &= n(n-1)\dots(n-(p-1))(z-a)^p(b-a)^{n-p}.\end{aligned}$$

18. Soient $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ et $z \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}(k(b-a)-n(z-a))^2 &= k^2(b-a)^2 - 2kn(b-a)(z-a) + n^2(z-a)^2\\ &= \left(k^2-k+k\right)(b-a)^2 - 2kn(b-a)(z-a) + n^2(z-a)^2\\ &= k(k-1)(b-a)^2 + k(b-a)^2 - 2nk(b-a)(z-a) + n^2(z-a)^2.\end{aligned}$$

19. Soient $z \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions 15) et 16),

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(k(b-a)-n(z-a))^2C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k}\\ &= (b-a)^2\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k}\\ &+ (b-a)^2\sum_{k=0}^{n}kC_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} - 2n(b-a)(z-a)\sum_{k=0}^{n}kC_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k}\\ &+ n^2(z-a)^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k}\\ &= (b-a)^2n(n-1)(z-a)^2(b-a)^{n-2} + (b-a)^2n(z-a)(b-a)^{n-1}\\ &- 2n(b-a)(z-a)n(z-a)(b-a)^{n-1} + n^2(z-a)^2(b-a)^n\\ &= (z-a)(b-a)^n\left[n(n-1)(z-a) + n(b-a) - 2n^2(z-a) + n^2(z-a)\right]\\ &= (z-a)(b-a)^n\left[-n(z-a) + n(b-a)\right] = n(z-a)(b-a)^n(b-a-z+a)\\ &= n(z-a)(b-z)(b-a)^n.\end{aligned}$$

20. Soient $r > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in [a, b]$. Soit k un (éventuel) entier naturel élément de $[\![0, n]\!]$ tel que $\left|a + \dfrac{k}{n}(b-a) - z\right| \geqslant r$.

Pour un tel entier k, on a successivement $\dfrac{|na + k(b-a) - nz|}{nr} \geqslant 1$ puis $\dfrac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2} \geqslant 1$.

D'autre part, la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ et en particulier la fonction f est bornée sur ce segment. Soit $M > 0$ un majorant de la fonction $|f|$ sur $[a, b]$. Pour tout entier k du type précédent,

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leqslant |f(z)| + \left|f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leqslant 2M \leqslant 2M\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2}.$$

La constante $C = 2M$ convient.

21. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 13), f vérifie la propriété (P) et donc il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, si $|x - y| < r_0$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ($r_0$ ne dépend donc que de ε). Soient $z \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![0, n]\!]$.

- si $\left|a + \dfrac{k}{n}(b-a) - z\right| \geqslant r_0$, alors d'après la question précédente

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leqslant C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r_0^2} \leqslant \varepsilon + C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r_0^2}.$$

- si $\left|\left(a + \dfrac{k}{n}(b-a)\right) - z\right| < r_0$, alors par définition de r_0,

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon + C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r_0^2}.$$

Mais alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left|f(z) - f\left(a + \dfrac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leqslant \varepsilon + C\dfrac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r_0^2}$.

22. Soient $z \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n} = \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (z-a)^k(b-z)^{n-k} = \frac{(z-a+b-z)^n}{(b-a)^n} = 1.$$

Mais alors, en tenant compte de $z - a \geqslant 0$ et $b - z \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\ C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}\right| \\
&= \left|f(z)\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n} - \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(z) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(z) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\varepsilon + C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r_0^2}\right) C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n} \\
&= \varepsilon + \frac{C}{(b-a)^n n^2 r_0^2}\sum_{k=0}^{n}(na + k(b-a) - nz)^2 C_n^k (z-a)^k(b-z)^{n-k} \\
&= \varepsilon + \frac{C}{(b-a)^n n^2 r_0^2} \times n(z-a)(b-z)(b-a)^n \text{ (d'après la question 19)} \\
&= \varepsilon + \frac{C(z-a)(b-z)}{nr_0^2}.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $z \in [a, b]$, $(z-a)(b-z) = -z^2 + (a+b)z - ab = -\left(z - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \dfrac{(a+b)^2}{4} - ab = -\left(z - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$ et donc

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}\right| \leqslant \varepsilon + \frac{C(b-a)^2}{4nr_0^2}.$$

Soit $D = \dfrac{C(b-a)^2}{4}$. Le réel D est un réel strictement positif ne dépendant que de la fonction f tel que

$$\forall z \in [a, b],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}\right| \leqslant \varepsilon + \frac{D}{nr_0^2}.$$

2 - Problème d'algèbre

Partie 2.1

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ puis P un polynôme de degré n. $P\left(\frac{X}{2}\right)$ est un polynôme de degré n de même que $P\left(\frac{X+1}{2}\right)$ et donc $V_n(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $V(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, V_n est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
V_n(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}\left(\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\
&= \lambda\left(\frac{1}{2}P\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \mu\left(\frac{1}{2}Q\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\
&= \lambda V_n(P) + \mu V_n(Q).
\end{aligned}$$

Donc, V_n est effectivement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème du rang, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\nu_{n,m} = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(V_n^m\right)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{rg}\left(V_n^m\right) = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) - \operatorname{rg}\left(V_n^m\right) + \frac{1}{2}\operatorname{rg}\left(V_n^m\right) = n + 1 - \frac{1}{2}\operatorname{rg}\left(V_n^m\right).$$

Il s'agit alors de montrer que la suite $\left(\operatorname{rg}\left(V_n^m\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$V_n^{m+1}(P) = V_n^m\left(V_n(P)\right) \in \operatorname{Im}\left(V_n^m\right)$$

et donc $\operatorname{Im}\left(V_n^{m+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(V_n^m\right)$. En particulier, $\operatorname{rg}\left(V_n^{m+1}\right) \leqslant \operatorname{rg}\left(V_n^m\right)$.

Ainsi, la suite $\left(\operatorname{rg}\left(V_n^m\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante et donc la suite $\left(\nu_{n,m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\nu_{n,m} \leqslant \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n+1$. Ainsi, la suite $\left(\nu_{n,m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $n+1$. Donc, la suite $\left(\nu_{n,m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque. Dans les questions 3) et 4), nous avons donné la solution probablement attendue. Mais :

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non nul de degré $k \in [\![0, n]\!]$. On sait déjà que $\deg\left(V_n(P)\right) \leqslant k$. De plus, le coefficient de X^k dans $V_n(P)$ est $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\operatorname{dom}(P)}{2^k} = \frac{\operatorname{dom}(P)}{2^k} \neq 0$. Donc, $\deg\left(V_n(P)\right) = k$.
- Ainsi, l'image d'un polynôme non nul par V_n est un polynôme non nul. Par suite, $\operatorname{Ker}\left(V_n\right) = \{0\}$ puis V_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puis $\operatorname{Im}\left(V_n\right) = \mathbb{R}_n[X]$.
- Mais alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, V_n^m est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puis

$$\nu_{n,m} = 0 + \frac{1}{2}(n+1) = \frac{n+1}{2}.$$

La suite $\left(\nu_{n,m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est donc constante.

5. $V_2(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. $V_2(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{2X+1}{4} = \frac{X}{2} + \frac{1}{4}$ et

$$V_2\left(X^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X+1}{2}\right)^2\right) = \frac{X^2 + X^2 + 2X + 1}{8} = \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8}.$$

Donc, $\operatorname{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(V_2\right) = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

6. $\det\left(M_2\right) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0$. Donc, V_2 est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ puis $\operatorname{Ker}\left(V_2\right) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}\left(V_2\right) = \mathbb{R}_2[X]$.

Partie 2.2

7. Soit $m \in \mathbb{N}$. $\det\left(V_2^m\right) = \det\left(M_2^m\right) = \left(\det\left(M_2\right)\right)^m \neq 0$. Donc, $V_2^m \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$. Mais alors,

$$\nu_{2,m} = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\nu_{2,m} = \dfrac{3}{2}$ puis $\lim\limits_{m \to +\infty} \nu_{2,m} = \dfrac{3}{2}$.

8. $\chi_{M_2} = (1 - X)\left(\dfrac{1}{2} - X\right)\left(\dfrac{1}{4} - X\right)$. χ_{M_2} est donc scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et on en déduit que, la matrice M_2 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puis que l'endomorphisme V_2 de $\mathbb{R}_2[X]$ est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres de V_2 sont des droites vectorielles.

9. D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}\left(V_2\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

- On a vu que $V_2(1) = 1$ et donc $E_1\left(V_2\right) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.
- $V_2(X) = \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{4}$ puis $V_2\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$. Donc, $E_{\frac{1}{2}}\left(V_2\right) = \mathrm{Vect}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.
- Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ puis $P = aX^2 + bX + c$.

$$V_2(P) = a\frac{2X^2 + 2X + 1}{8} + b\frac{2X + 1}{4} + c = \frac{a}{4}X^2 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2}\right)X + \left(\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + c\right).$$

Ensuite, $V_2(P) = \dfrac{1}{4}P \Leftrightarrow \dfrac{a}{4}X^2 + \left(\dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2}\right)X + \left(\dfrac{a}{8} + \dfrac{b}{4} + c\right) = \dfrac{a}{4}X^2 + \dfrac{b}{4}X + \dfrac{c}{4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{b}{4} \\ \dfrac{a}{8} + \dfrac{b}{4} + c = \dfrac{c}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -a \\ c = \dfrac{a}{6} \end{array}\right.$.

Donc, $E_{\frac{1}{4}} = \left\{a\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right),\ a \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right)$

10. On pose $E_0 = 1$, $E_1 = X$ et $E_2 = X^2$ de sorte que $\mathcal{B} = \left(E_0, E_1, E_2\right)$. On pose aussi $P_0 = 1$, $P_1 = X - \dfrac{1}{2}$ et $P_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$ puis $\mathcal{C} = \left(P_0, P_1, P_2\right)$. $\mathcal{C}$ est une base de vecteurs propres de V_2 associée à la famille de valeurs propres $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

La matrice de passage $\mathcal{P}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Puisque $\mathcal{P} = \mathscr{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, on en déduit que $\mathcal{P}^{-1} = \mathscr{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = E_0 \\ P_1 = E_1 - \dfrac{1}{2}E_0 \\ P_2 = E_2 - E_1 + \dfrac{1}{6}E_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_0 = P_0 \\ E_1 = P_1 + \dfrac{1}{2}P_0 \\ P_2 = E_2 - P_1 - \dfrac{1}{2}P_0 + \dfrac{1}{6}P_0 \end{array}\right. . \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_0 = P_0 \\ E_1 = P_1 + \dfrac{1}{2}P_0 \\ E_2 = P_2 + P_1 + \dfrac{1}{3}P_0 \end{array}\right.$$

Donc, $\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Par définition de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(V_2\right) = \mathrm{diag}\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$. On note Δ cette matrice.

13. La vecteur colonne représentant le polynôme Q dans la base $\mathcal{B}$ est $C = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$. Soit C' le vecteur colonne représentant le polynôme Q dans la base $\mathcal{C}$. Les formules de changement de base fournissent $C = \mathcal{P}C'$ ou encore

$$C' = \mathcal{P}^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3} \\ b + a \\ a \end{pmatrix}.$$

Par suite, $Q = aP_2 + (a+b)P_1 + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right) P_0$.

14. Soit $m \in \mathbb{N}$. $M_2 = \mathcal{P}\Delta\mathcal{P}^{-1}$ puis

$$\begin{aligned} M_2^m &= \left(\mathcal{P}\Delta\mathcal{P}^{-1}\right)^m = \mathcal{P}\Delta^m\mathcal{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^m} & \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^m} \\ 0 & \frac{1}{2^m} & -\frac{1}{4^m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^m} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^m} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^m} \\ 0 & \frac{1}{2^m} & \frac{1}{2^m} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Soit $m \in \mathbb{N}$. Le vecteur colonne représentant le vecteur $V_2^m(Q)$ dans la base $\mathcal{C}$ est

$$\left(\text{Mat}_{\mathcal{C}}\left(V_2^m(Q)\right)\right) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(Q) = \Delta^m C' = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{4^m}\right) \begin{pmatrix} c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3} \\ b + a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3} \\ \frac{b+a}{2^m} \\ \frac{a}{4^m} \end{pmatrix}.$$

Les trois suites coordonnées convergent vers $c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3}$, 0 et 0 respectivement.

16. Pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X] \setminus \{0\}$, $|||V_2||| \geqslant \frac{\|V_2(Q)\|}{\|Q\|}$. En particulier,

$$|||V_2||| \geqslant \frac{\|V_2(E_0)\|}{\|E_0\|} = \frac{\|E_0\|}{\|E_0\|} = 1.$$

17. La suite de matrices $(\Delta^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\Delta_\infty = \text{diag}(1,0,0)$. De plus, l'application $f\ :\ M \mapsto \mathcal{P}M\mathcal{P}^{-1}$ est continue sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (car f est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$). Donc, la suite $(M_2^m)_{m\in\mathbb{N}} = (f(\Delta^m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $f(\Delta_\infty) = \mathcal{P}\Delta_\infty\mathcal{P}^{-1}$. Mais alors, la suite d'endomorphismes $(V_2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X]), +, ., |||\ |||)$ vers un certain endomorphisme U.

Enfin, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\|V_2^m(Q) - U(Q)\| \leqslant |||V_2^m - U||| \times \|Q\|.$$

et donc, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \|V_2^m(Q) - U(Q)\| = 0$.

18. $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(U) = \Delta_\infty = \text{diag}(1,0,0)$.

19. $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(U) = \Delta_\infty = \text{diag}(1,0,0)$. Cette matrice est de rang 1.

20. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\nu_{2,m} = \dfrac{3}{2}$. D'autre part, $\text{rg}(U) = \text{rg}\left(\Delta_\infty\right) = 1$ puis d'après le théorème du rang, $\dim\left(\text{Ker}(U)\right) = 3 - \text{rg}(U) = 2$ et donc

$$\dim(\text{Ker}(U)) + \frac{1}{2}\text{rg}(U) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \neq \frac{3}{2}.$$

Mais alors, la suite $\left(\dim\left(\text{Ker}\left(V_2^m\right)\right) + \dfrac{1}{2}\text{rg}\left(V_2^m\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\dim(\text{Ker}(U)) + \dfrac{1}{2}\text{rg}(U)$ (mais converge vers $\dfrac{3}{2}$) bien que la suite $\left(V_2^m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers U.

