ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f(x) = x - Ln(1+x^2)$

1. Etudier les variations de *f* (on précisera son comportement aux infinis) et donner l'allure de son graphe.

2. Etudier la convexité de *f*.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\, dx$.

4. Etudier la suite réelle $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = Ln(1+u_n^2)$ et $u_0 \neq 0$.

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^n}$$

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de *n* (on précisera son comportement à l'infini).

2. Tracer les graphes de f_1 et f_2.

3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx$.

Exercice n° 3

On dispose de 12 cartes retournées sur une table (on ne voit pas la couleur de ces cartes). Ce dispositif contient 3 cartes de chaque couleur (cœur, carreau, pique et trêfle).

On retourne au hasard les cartes une par une et sans remise. Le jeu s'arrête quand on a tiré 3 couleurs identiques.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au troisième tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au quatrième tirage ?
3. Quel est le nombre maximal possible de tirages pour obtenir 3 cartes de la même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de 3 couleurs différentes au troisième tirage ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 cartes de 4 couleurs différentes au quatrième tirage ?

Exercice n° 4

1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n^2}{4}$ et $1 < u_0 \le 2$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_{n+1} = v_n + Ln(u_n)$ et $v_0 > 0$. Etudier la convergence de cette suite $(v_n)_{n\in N}$.

3. On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $w_{n+1} = \dfrac{9+w_n^2}{6}$ et $w_0 = 0$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).

Exercice n° 5

Soit la fonction f_α définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f_\alpha(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où α est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que f_α est prolongeable par continuité en zéro. On notera encore f_α la fonction ainsi prolongée en zéro.

2. Etudier la dérivabilité de f_α sur *R*.

3. Etudier la continuité de la fonction dérivée de f_α sur *R* (quand elle existe).

4. La fonction f_α est-elle deux fois continument dérivable en zéro ?

5. Résoudre l'équation $f_\alpha(x) = 0$

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{e^{(x^2)} - 1}{x}$

1. Montrer que *f* admet une application réciproque, notée f^{-1}, définie sur *R*.

2. Donner un développement limité de f^{-1}, à l'ordre 5, au voisinage de zéro.