SESSION 2021

CAPESA
Analystes statisticiens

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. Puisque pour tout réel x, on a $x^2+1>0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

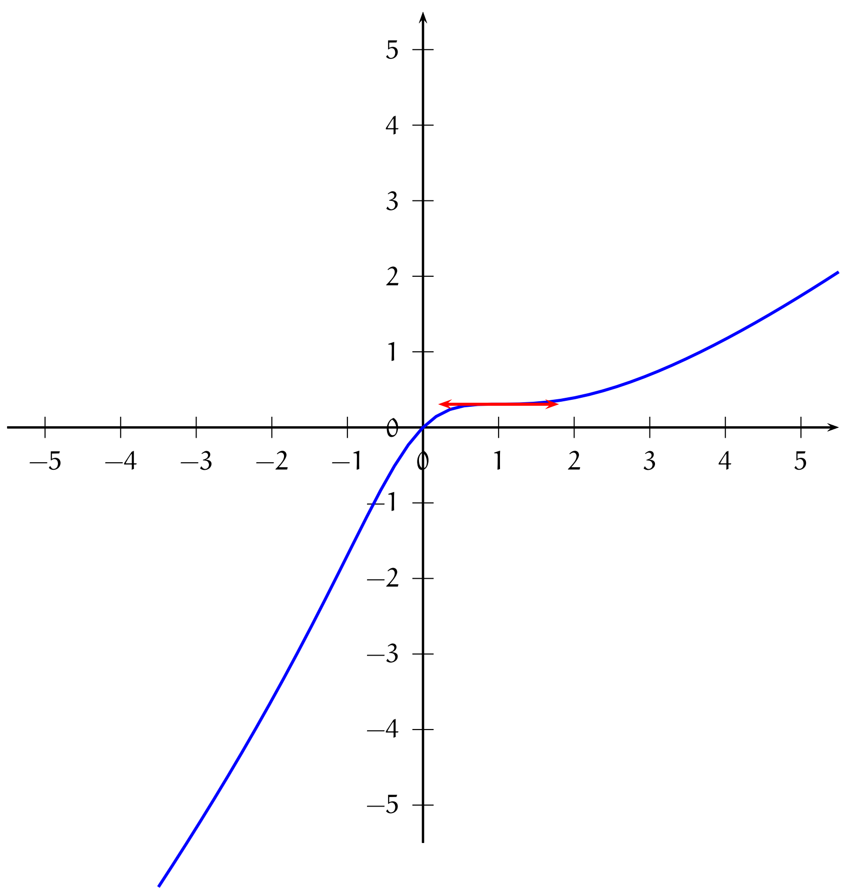
Pour tout réel x distinct de 1, $f'(x)>0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\right) = x\left(1 - \frac{\ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\ &= x\left(1 - \frac{2\ln(|x|)}{x} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0\times 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(|x|)}{x} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2\ln(|x|)}{x} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1$. Mais alors, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Graphe de la fonction f.



2. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\left(x^2+1\right) - \left(x^2-2x+1\right)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

La fonction f'' est strictement positive sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et strictement négative sur $]-1,1[$. La fonction f est donc convexe sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ et concave sur $[-1,1]$. De plus, la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion, à savoir les points de coordonnées respectives $(-1,-1-\ln(2))$ et $(1,1-\ln(2))$.

3. f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc I existe. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx &= \int_0^1 1\times\ln\left(1+x^2\right) dx = \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln(2) - 2\left(1-[\mathrm{Arctan}(x)]_0^1\right) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Mais alors

$$I = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \frac{1}{2} - \ln(2) + 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2} - \ln(2) - \frac{\pi}{2}.$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$.

- $u_0 \neq 0$ puis $1+u_0^2 > 1$. Mais alors, $u_1 = \ln\left(1+u_0\right)^2$ existe et $u_1 > 0$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que u_n existe et $u_n > 0$. Alors, $1+u_n^2 > 1 > 0$ puis u_{n+1} existe et $u_{n+1} = \ln\left(1+u_n^2\right) > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$.

Soit $n \geqslant 1$. $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1+u_n^2\right) - u_n = -f\left(u_n\right)$. D'après la question 1), la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc, si $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$. Puisque $u_n > 0$, $f\left(u_n\right) > 0$ puis $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi, la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir du rang 1. De plus, la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée (par 0). On en déduit que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul.

La fonction $x\mapsto\ln\left(1+x^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en ℓ. Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \ln\left(1+\ell^2\right)$ ou encore $f(\ell) = 0$. Si x est un réel strictement positif, alors $f(x) > 0$ et en particulier, $f(x) \neq 0$. Puisque ℓ est un réel positif tel que $f(\ell) = 0$, il ne reste que $\ell = 0$.

On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_n(x) = e^x\times\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} + e^x\times\frac{-2nx}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} = \frac{\left(x^2-2nx+1\right)e^x}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}.$$

Pour tout réel x, $\dfrac{e^x}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} > 0$. Donc, pour tout réel x, $f_n'(x)$ est du signe de $x^2-2nx+1$.

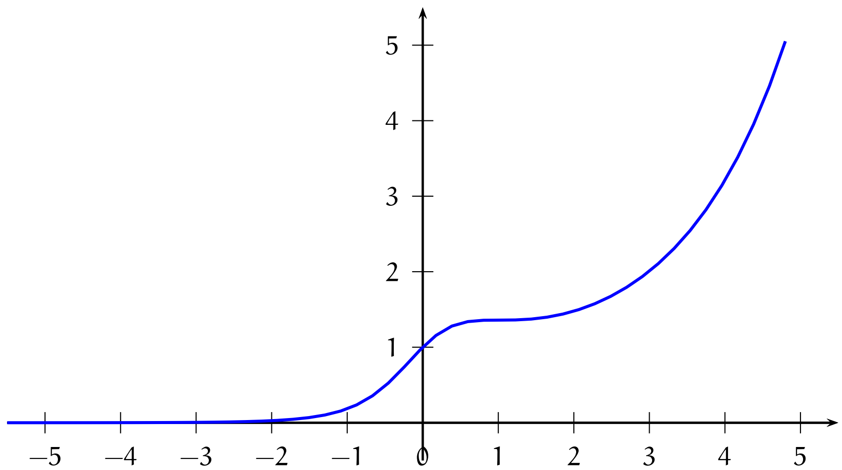
1er cas. Si $n=1$, $x^2-2nx+1 = x^2-2x+1 = (x-1)^2$. Dans ce cas, la fonction f_1' est strictement positive sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ puis la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2ème cas. Si $n\geqslant 2$, le discriminant réduit du trinôme $x^2-2nx+1$ est $\Delta' = n^2-1 > 0$. Le trinôme $x^2-2nx+1$ admet deux racines réelles strictement positives $x_{1,n} = n-\sqrt{n^2-1}$ et $x_{2,n} = n+\sqrt{n^2-1}$. Puisque le coefficient de x^2 est strictement positif, on en déduit que la fonction f_n' est strictement positive sur $\left]-\infty, n-\sqrt{n^2-1}\right[\cup\left]n+\sqrt{n^2-1},+\infty\right[$ et strictement négative sur $\left]n-\sqrt{n^2-1}, n+\sqrt{n^2-1}\right[$. Mais alors, la fonction f_n est strictement croissante sur $\left]-\infty, n-\sqrt{n^2-1}\right]$ et sur $\left[n+\sqrt{n^2-1},+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[n-\sqrt{n^2-1}, n+\sqrt{n^2-1}\right]$.

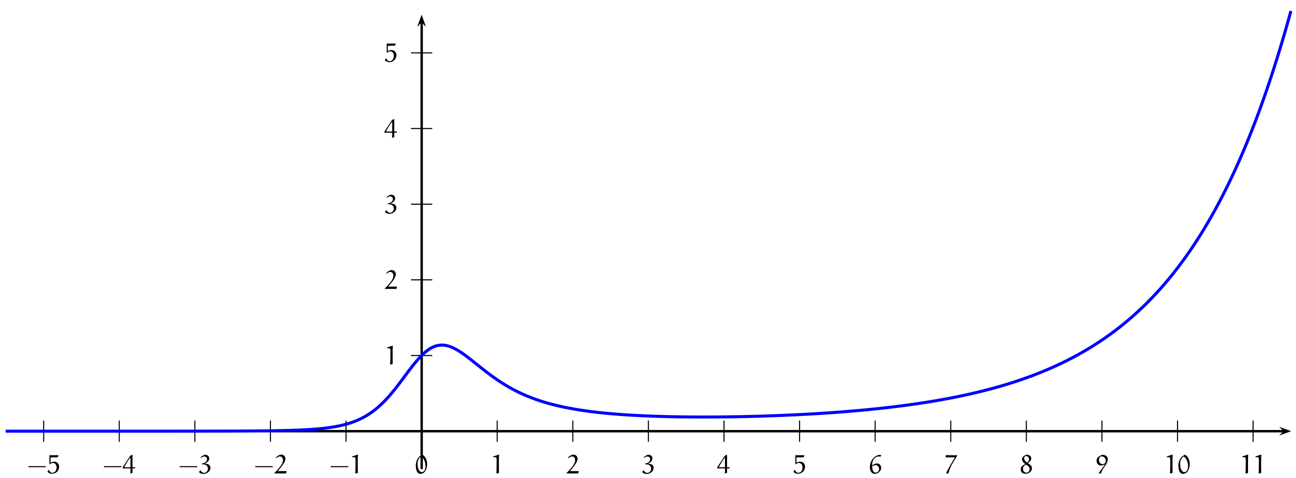
En particulier, la fonction f_2 est strictement croissante sur $\left]-\infty, 2-\sqrt{3}\right]$ et sur $\left[2+\sqrt{3},+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]$.

Ensuite, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout réel non nul x, $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^{2n}} \times \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^n}$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^n} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^n} = 1$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^{2n}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{2n}} = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

2. Graphe de la fonction f_1.



Graphe de la fonction f_2.



3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \in [1,2]$, $0 \leqslant e^x \leqslant e^2$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{(x^2)^n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$. En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient pour tout réel $x \in [1,2]$, $0 \leqslant \dfrac{e^x}{(1+x^2)^n} \leqslant \dfrac{e^2}{x^{2n}}$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_1^2 \frac{e^x}{(1+x^2)^n}\, dx \leqslant \int_1^2 \frac{e^2}{x^{2n}}\, dx = \frac{e^2}{2n-1}\left[-\frac{1}{x^{2n-1}}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2n-1}\left(1-\frac{1}{2^{2n-1}}\right) \leqslant \frac{e^2}{2n-1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{2n-1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\left(\displaystyle\int_1^2 f_n(x)\, dx\right)_{n\geqslant 1}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx = 0.$$

Exercice 3

1. Déterminons d'abord la probabilité d'obtenir 3 carreaux lors des trois premiers tirages. Il y a $12 \times 11 \times 10 = 1320$ tirages successifs sans remise de trois cartes parmi 12, tous équiprobables. Parmi ces 1320 tirages, il y en a $3 \times 2 \times 1 = 6$ qui comportent 3 carreaux. La probabilité d'obtenir 3 carreaux lors des trois premiers tirages est $\dfrac{3 \times 2 \times 1}{12 \times 11 \times 10} = \dfrac{1}{2 \times 11 \times 10}$.

Maintenant, l'événement « obtenir trois cartes de même couleur lors des trois premiers tirages » est la réunion disjointe des événements « obtenir trois carreaux », « obtenir trois cœurs », « obtenir trois piques » et « obtenir trois trêfles », tous équiprobables. La probabilité demandée est donc

$$p = 4 \times \frac{1}{2 \times 11 \times 10} = \frac{1}{55}.$$

2. La carte de couleur différente peut être obtenue au premier, deuxième ou troisième tirage (si les trois premiers tirages sont de la même couleur, le jeu s'arrête). Commençons par déterminer la probabilité de l'événement « obtenir un cœur au premier tirage puis trois carreaux ». Cette probabilité est $\dfrac{3 \times 3 \times 2 \times 1}{12 \times 11 \times 10 \times 9} = \dfrac{1}{12 \times 11 \times 5}$. Ensuite, la probabilité d'obtenir un cœur au cours des trois premiers tirages (premier, deuxième ou troisième) et trois carreaux sinon est $3 \times \dfrac{1}{12 \times 11 \times 5} = \dfrac{1}{4 \times 11 \times 5}$. Maintenant, il y a 4×3 choix des deux couleurs où la première citée apparait une fois au cours des trois premiers tirages et la deuxième citée apparait trois fois. La probabilité demandée est

$$p = 4 \times 3 \times \frac{1}{4 \times 11 \times 5} = \frac{3}{55}.$$

3. « Le pire » est si l'on obtient deux cartes de chaque couleur au cours des huit premiers tirages. Le 9-ème tirage fournit alors obligatoirement trois cartes identiques parmi les 9. Le nombre maximal cherché est 9.

4. Le nombre de tirages de 3 cartes de couleurs carreau, cœur et pique est $3^3 \times 3! = 6 \times 27 = 162$. Ensuite, il y a $C_4^3 = 4$ choix des trois couleurs deux à deux distinctes et donc 4×162 tirages de trois cartes donnant 3 couleurs deux à deux distinctes. La probabilité demandée est

$$p = \frac{4 \times 3^3 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{3^2 \times 3}{11 \times 5} = \frac{27}{55}.$$

5. Le nombre de tirages de 4 cartes de couleurs deux à deux distinctes est $3^4 \times 4!$. La probabilité demandée est

$$p = \frac{3^4 \times 4!}{12 \times 11 \times 10 \times 9} = \frac{3^2}{11 \times 5} = \frac{9}{55}.$$

Exercice 4

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leqslant 2$.

- Le résultat est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $1 < u_n \leqslant 2$. Alors, $\dfrac{3+1^2}{4} < \dfrac{3+u_n^2}{4} \leqslant \dfrac{3+2^2}{4}$ ou encore $1 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{7}{4}$ et on en déduit que $1 < u_{n+1} \leqslant 2$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3+u_n^2}{4} - u_n = \dfrac{u_n^2 - 4u_n + 3}{4} = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4} < 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ puis la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leqslant 2$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leqslant \ell \leqslant 2$. Ensuite, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en ℓ. On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient $\ell = f(\ell)$ ou encore $\dfrac{3+\ell^2}{4} = \ell$ ou encore $(\ell - 1)(\ell - 3) = 0$ ou enfin $\ell \in \{1, 3\}$. Puisque $1 \leqslant \ell \leqslant 2$, on a finalement $\ell = 1$.

On a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, convergente, de limite 1.

2. On note que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_k)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \ln(u_n) > 0$ et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si cette suite est majorée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} - 1 = \dfrac{3+u_n^2}{4} - 1 = \dfrac{u_n^2-1}{4} = \dfrac{(u_n+1)(u_n-1)}{4} \leqslant \dfrac{3}{4}(u_n - 1)$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n (u_0 - 1)$. Puisque la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \ln(u_n) \leqslant u_n - 1 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 1).$$

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n \leqslant v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k (u_0 - 1) = v_0 + (u_0 - 1) \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \leqslant v_0 + \frac{4}{3}(u_0 - 1).$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et donc converge.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant w_n < 3$.

- Le résultat est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant w_n < 3$. Alors, $\dfrac{9+0^2}{6} \leqslant \dfrac{9+w_n^2}{6} < \dfrac{9+3^2}{6}$ ou encore $\dfrac{3}{2} \leqslant w_{n+1} < 3$ et on en déduit que $0 \leqslant w_{n+1} < 3$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{9+w_n^2}{6} - w_n = \dfrac{w_n^2 - 6w_n + 9}{6} = \dfrac{(w_n - 3)^2}{6} > 0$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante. De plus, cette suite est majorée par 3 et donc cette suite converge vers un certain réel ℓ. Comme en 1), le réel ℓ vérifie $\ell = \dfrac{9+\ell^2}{6}$ et donc $(\ell - 3)^2 = 0$ puis $\ell = 3$.

On a montré que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante, convergente, de limite 3.

Exercice 5

1. (Erreur d'énoncé : f_α est définie sur $]0, +\infty[$ et pas sur $\mathbb{R}^*$ quand α est un réel strictement positif quelconque). Pour tout réel strictement positif x, $|f(x)| = x^\alpha \left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^\alpha$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = 0$. Ainsi, la fonction f_α est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$ (on note encore f_α le prolongement obtenu).

2. La fonction f_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. Ensuite, pour $x > 0$,

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si $\alpha - 1 > 0$ ou encore $\alpha > 1$, cette expression tend vers 0 quand x tend vers 0 d'après 1). Dans ce cas, f_α est dérivable en 0 (à droite) et $f'_\alpha(0) = 0$.

Si $\alpha = 1$, on utilise le rappel de l'énoncé : le taux de f_α en 0 n'a pas de limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Dans ce cas, f_α n'est pas dérivable en 0 à droite.

Supposons maintenant $0 < \alpha < 1$ de sorte que $\alpha - 1 < 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_\alpha(x_n) - f_\alpha(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to+\infty} (x_n)^{\alpha-1} = +\infty.$$

Donc, le taux de f_α en 0 n'a pas de limite finie quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Dans ce cas aussi f_α n'est pas dérivable en 0 à droite.

En résumé, f_α est dérivable en 0 à droite si et seulement si $\alpha > 1$. D'autre part, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^\alpha \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, si $\alpha \in]0, 1]$, f_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ (et pas en 0) et si $\alpha \in]1, +\infty[$, la fonction f_α est dérivable sur $[0, +\infty[$.

3. On suppose donc $\alpha > 1$. Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, $f'_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

L'expression $\alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 d'après les questions précédentes et donc la fonction f'_α est continue en 0 à droite si et seulement si l'expression $-x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par le même raisonnement que dans les questions précédentes, ceci équivaut à $\alpha - 2 > 0$ ou encore $\alpha > 2$.

En résumé, la fonction f'_α est continue en 0 à droite si et seulement si $\alpha > 2$.

4. Pour que f_α soit deux fois dérivable en 0, il est nécessaire que f'_α soit continue en 0. On suppose donc $\alpha > 2$. Dans ce cas, pour $x > 0$,

$$\frac{f'_\alpha(x) - f'_\alpha(0)}{x - 0} = \alpha x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-3} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puisque $\alpha x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le taux a une limite en 0 à droite si et seulement si $x^{\alpha-3} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ a une limite en 0 à droite ce qui équivaut à $\alpha > 3$. Dans ce cas, cette limite est nulle puis $f''_\alpha(0) = 0$.

Ainsi, la fonction f_α est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 3$ ce que l'on suppose dorénavant. On a $f''_\alpha(0) = 0$ et d'autre part, la fonction f'_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$f''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha x^{\alpha-3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - (\alpha-2)x^{\alpha-3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\alpha-4} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures si et seulement si $x^{\alpha-4} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 par valeurs supérieures ce qui équivaut à $\alpha > 4$.

La fonction f_α est deux fois continument dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 4$.

5. (La notation f_α désigne toujours le prolongement). Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \left(x > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \left(\exists n \in \mathbb{N}^*/\ \frac{1}{x} = n\pi\right) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \left(\exists n \in \mathbb{N}^*/\ x = \frac{1}{n\pi}\right). \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\mathscr{S} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n\pi},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 6

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \times \frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} = 0 \times 1 = 0 = f(0).$$

La fonction f est donc continue en 0 et finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x,

$$f'(x) = \frac{2xe^{(x^2)} \times x - \left(e^{(x^2)} - 1\right)}{x^2} = \frac{\left(2x^2 - 1\right) e^{(x^2)} + 1}{x^2} = \frac{e^{(x^2)}}{x^2}\left(2x^2 - 1 + e^{(-x^2)}\right).$$

Pour tout réel non nul x, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 1 + e^{(-x^2)}$. Pour $t \geqslant 0$, posons $g(t) = 2t - 1 + e^{-t}$. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $g'(t) = 2 - e^{-t} \geqslant 2 - 1 > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$ puis, pour tout réel strictement positif t, $g(t) > g(0) = 0$. On en déduit que pour tout réel non nul x, $2x^2 - 1 + e^{(-x^2)} = g\left(x^2\right) > 0$ puis $f'(x) > 0$.

Quand x tend vers 0, $f(x) = \dfrac{1 + x^2 + o\left(x^2\right) - 1}{x} = x + o(x) = f(0) + 1 \times x + o(x)$. Puisque f admet en 0 un développement limité d'ordre 1, la fonction f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = 1$.

• Ainsi la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Mais alors, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées). La fonction f admet donc une application réciproque, définie sur $\mathbb{R}$.

2. Tout d'abord

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)}{x} \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o\left(x^5\right).$$

f est continue en 0 et donc f^{-1} est continue en $f(0) = 0$. Par suite, $f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} o(1)$ (développement limité de f^{-1} d'ordre 0 en 0). Ensuite, puis que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1 \neq 0$, f^{-1} est dérivable en $f(0) = 0$ et $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$. On en déduit que $f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$ (développement limité de f^{-1} d'ordre 1 en 0).

Ensuite f est impaire. Vérifions alors que f^{-1} est également impaire. Soit $y \in \mathbb{R}$ puis $x = f^{-1}(y)$. Donc, $y = f(x)$ puis

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

On a montré que f^{-1} est impaire.

On admet que la fonction f^{-1} a un développement limité d'ordre 5 en 0. Puisque f^{-1} est impaire, son développement limité d'ordre 5 en 0 est de la forme $f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} x + ax^3 + bx^5 + o\left(x^5\right)$. Mais alors

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &\underset{x \to 0}{=} f^{-1}\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right) + a\left(x + \frac{x^3}{2}\right)^3 + b(x)^5 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} x + \left(\frac{1}{2} + a\right)x^3 + \left(\frac{1}{6} + \frac{3a}{2} + b\right)x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Puisque d'autre part, $f^{-1}(f(x)) = x \underset{x \to 0}{=} x + o\left(x^5\right)$, par unicité de la partie régulière d'un développement limité, on obtient $a + \dfrac{1}{2} = 0$ et $\dfrac{1}{6} + \dfrac{3a}{2} + b = 0$ puis $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{7}{12}$. On a montré que

$$f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + \frac{7x^5}{12} + o\left(x^5\right).$$

