ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est <u>obligatoire</u> et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien. On rappelle les relations

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1+\cos\theta}{2} \\ \sin\theta &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

valables pour tout réel θ.

On rappelle enfin la limite classique :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x(\sin x)dx$.
2. Exprimer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x^3}{\cos x}$ comme une fonction de $\sin x$.
3. Donner la limite en $-\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}+x$.

4. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la fonction $f(x) = \sin x \ln(x - x^2)$.

5. Ecrire le nombre complexe $z = -3 + 3i$ sous forme trigonométrique.

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

7. Une urne contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On tire au hasard uniforme et avec remise deux fois une boule, et on fait le produit X des chiffres obtenus. Pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 4)$. Cette suite est-elle monotone ? Est-elle convergente ?

9. En utilisant la double inégalité (qu'on ne cherchera pas à démontrer)

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

valable pour tout entier $n > 0$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}.$$

10. Résoudre l'equation $x^3 + 6x^2 - x = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2 Pour $a \in \mathbf{R}$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_a(x) = ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1$$

1. Dans cette partie, on pose $a = -1/3$ et pour simplifier on note $f_{-\frac{1}{3}} = f$.
   (a) Calculer f', et en déduire les intervalles de croissance de f.
   (b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que la valeur de $f(-2)$.
   (c) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport aux valeurs -2, -1 et 0.
   (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.

2. On suppose désormais a quelconque.
   (a) Pour un point (x, y) tel que $x \neq \{0, 3\}$, montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que $f_a(x) = y$ et donner la valeur de a.
   (b) Pour y fixé, résoudre en a l'équation $f_a(3) = y$.

(c) Déduire de ce qui précède que toutes les courbes représentatives des fonctions f_a, $a \in \mathbf{R}$, passent par deux points M_1 et M_2 du plan dont on donnera les coordonnées.

(d) Montrer que la tangente à la courbe de f_a au point d'abscisse $x = 0$ ne dépend pas de $a \in \mathbf{R}$.

Exercice 3 On considère la fonction de la variable réelle f définie par

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{2}{x}} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

1. Montrer que
$$\lim_{|x| \to \infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = 2.$$
(on pourra utiliser le rappel donné au début de l'énoncé avant l'exercice 1)
2. Donner le domaine de définition de f, calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et étudier soigneusement ses éventuelles branches infinies.
3. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si $t > 1$,
$$\int_1^t x e^{\frac{2}{x}} dx = \frac{t^2 e^{\frac{2}{t}} - e^2}{2} + \int_1^t e^{\frac{2}{x}} dx.$$
6. En déduire l'ensemble des primitives de f.
7. Calculer l'aire du domaine du plan constitué des points (x, y) vérifiant $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

1. Calculer I_0 et montrer que $I_1 = \ln 2 - 1/2$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}.$$
3. Pour x réel différent de -1 et n entier naturel non nul, montrer que
$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{1+x}.$$
4. On pose
$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
Déduire de la question précédente que
$$I_n = (-1)^n (S_n - \ln 2).$$

5. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 5

1. On se propose de montrer par récurrence la proposition
   $\mathcal{P}_n$: *Si n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \cdots, a_n$ vérifient $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.*
   Pour ce faire, on suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un certain $n \geq 1$, et on considère $n+1$ nombres réels strictement positifs $a_1, \cdots, a_{n+1}$ vérifiant $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$. On supposera les a_i rangés par ordre croissant, c'est-à-dire $a_1 \leq \cdots \leq a_n$.
   (a) Montrer que $a_1 \leq 1$ et $a_{n+1} \geq 1$.
   (b) On pose $b_1 = a_1 a_{n+1}$. Montrer que $b_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$.
   (c) En déduire que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1)$.
   (d) En déduire que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, puis conclure soigneusement.
2. On considère maintenant n nombres réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que
$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$
   (on pourra poser $a_k = \dfrac{x_k}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et utiliser la question précédente).
3. On considère enfin un nombre réel $x > 0$.
   (a) Calculer $(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}}$.
   (b) Montrer que
$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

Exercice 6 Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $a > 0$ et $b > 0$. On définit une suite $(z_n)_{n\geq 0}$ par $z_0 \in \mathcal{Q}$ et
$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} \qquad \text{pour } n \geq 0.$$

1. Montrer que $z_n \in \mathcal{Q}$ pour tout entier $n \geq 0$.
2. En déduire qu'il existe un unique réel positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in]0, \pi/2[$ tels que $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i \sin\theta_n)$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,
$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}$$
   et
$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$
4. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite réelle $l \geq 0$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne dans laquelle on a mis n boules bleues, 5 boules rouges et 3 boules jaunes, soit $n+8$ boules en tout.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne, et on note p_n la probabilité que ces deux boules aient la même couleur.
   (a) Donner la probabilité d'avoir sorti deux boules bleues, celle d'avoir sorti deux boules rouges et celle d'avoir sorti deux boules jaunes. En déduire la valeur de p_n
   (b) Calculer la limite de p_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?
2. On effectue maintenant une série de 10 tirages successifs de deux boules comme à la question précédente, en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où, lors de ces 10 tirages, on a obtenu deux boules de même couleur.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Calculer la probabilité r_n d'avoir obtenu exactement 9 fois deux boules de même couleur dans ces tirages.
   (c) Calculer la limite de r_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?