SESSION 2021

CAPESA
Analystes statisticiens

PREMIERE COMPOSITION

Exercice 1

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \times \cos^2(x)\ dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{24}$.

2. On suppose que pour tout réel x n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{(\sin(x))^3}{\cos(x)} = \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3\cos(x)\sin^2(x)\times\cos(x) - \sin^3(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)\left(3\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x)\left(3\left(1-\sin^2(x)\right)+\sin^2(x)\right)}{1-\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)\left(3-2\sin^2(x)\right)}{1-\sin^2(x)} \end{aligned}$$

3. Le discriminant du trinôme $2x^2+x+1$ est strictement négatif et le coefficient de x^2 dans ce trinôme est strictement positif. Donc, pour tout réel x, $2x^2+x+1>0$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x<0$. Alors,

$$\sqrt{2x^2+x+1}+x = \sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x = -x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x = x\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right).$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1 = -\sqrt{2}+1<0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. Pour tout réel x, $x-x^2>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow x\in]0,1[$. Ensuite, pour $x\in]0,1[$,

$$f(x) = \sin(x)\ln\left(x-x^2\right) = \sin(x)\ln(x(1-x)) = \sin(x)\ln(x)+\sin(x)\ln(1-x).$$

Pour $x\in]0,1[$, $\sin(x)\ln(x) = \frac{\sin(x)}{x}\times x\ln(x)$. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sin(x)\ln(x) = 0$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sin(x)\ln(1-x) = 0\times0 = 0$. En additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$.

5. $-3+3i = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. $e^x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et pout tout réel x non nul,

$$f(-x) = \frac{-2x}{e^{-x}-e^x} = \frac{2x}{e^x-e^{-x}} = f(x).$$

Donc, la fonction f est paire. On étudie les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$ et on en déduit les variations de la fonction f sur $]-\infty,0[$ par symétrie (si f a un certain sens de variation sur un intervalle I contenu dans $]0,+\infty[$, alors f a le sens de variation contraire sur I', intervalle symétrique de I par rapport à 0).

7. On identifie un tirage successif avec remise de deux boules à un couple (x, y) d'éléments de $\{0, 1, 2\}$. Chaque tirage a une probabilité égale à $\dfrac{1}{9}$.
L'ensemble des valeurs prises par X est $\{0, 1, 2, 4\}$.

- Les tirages tels que $X = 0$ sont : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$ et $(2, 0)$. Donc, $P(X = 0) = \dfrac{5}{9}$.
- Les tirages tels que $X = 1$ sont : $(1, 1)$. Donc, $P(X = 1) = \dfrac{1}{9}$.
- Les tirages tels que $X = 2$ sont : $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Donc, $P(X = 2) = \dfrac{2}{9}$.
- Les tirages tels que $X = 4$ sont : $(2, 2)$. Donc, $P(X = 4) = \dfrac{1}{9}$.

L'espérance de X est

$$E(X) = \frac{5}{9} \times 0 + \frac{1}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{1}{9} \times 4 = 1.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + 4\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 - 2u_n + 4\right) = \dfrac{1}{2}\left((u_n - 1)^2 + 3\right) > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Mais alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ou bien convergente, ou bien divergente de limite $+\infty$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ, alors $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell^2 + 4\right)$ puis $\ell^2 - 2\ell + 4 = 0$. Pour tout réel x, $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$. Donc, le trinôme $x^2 + 2x + 4$ n'a pas de racine réelle et donc il n'existe pas de réel ℓ tel que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell^2 + 4\right)$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

En résumé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $n^4 + n \geqslant n^4 + k \geqslant n^4 + 1 > 0$ puis $\dfrac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$. En additionnant membre ces inégalités, on obtient

$$n \times \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leqslant n \times \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^3}}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^4}}}.$$

Les membres de gauche et de droite de cet encadrement tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^3 + 6x^2 - x = x\left(x^2 + 6x - 1\right) = x\left((x + 3)^2 - 10\right) = x\left(x + 3 - \sqrt{10}\right)\left(x + 3 + \sqrt{10}\right)$. L'ensemble des solutions de l'équation proposée est le même dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, à savoir $\left\{0, -3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}\right\}$.

Exercice 2

1. a) Pour tout réel x, $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour tout réel x, $f'(x) = -x^2 - 4x + 1$. Ce trinôme admet deux racines réelles, à savoir $x_1 = -2 - \sqrt{5}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{5}$. Le coefficient de x^2 étant strictement négatif, la fonction f' est strictement négative sur $\left]-\infty, -2 - \sqrt{5}\right[\cup \left]-2 + \sqrt{5}, +\infty\right[$ et strictement positive sur $\left]-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\right[$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -2 - \sqrt{5}\right]$ et sur $\left[-2 + \sqrt{5}, +\infty\right[$ et est strictement croissante sur $\left[-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\right]$.

b) La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Ensuite, $f(-2) = \dfrac{8}{3} - 8 - 2 + 1 = -\dfrac{19}{3}$.

c) La fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -2-\sqrt{5}\right]$. En particulier, la fonction f s'annule au plus une fois dans $\left]-\infty, -2-\sqrt{5}\right]$. La fonction f est continue sur $\left]-\infty, -2-\sqrt{5}\right]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $f\left(-2-\sqrt{5}\right) < f(-2) = -\dfrac{19}{3} < 0$ (car la fonction f est strictement croissante sur $\left[-2-\sqrt{5}, -2\right] \subset \left[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}\right]$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $\left]-\infty, -2-\sqrt{5}\right]$, en un certain réel $\alpha \in \left]-\infty, -2-\sqrt{5}\right[$ et donc la fonction f s'annule exactement une fois sur $\left]-\infty, -2-\sqrt{5}\right]$. On note que $\alpha < -2-\sqrt{5} < -2$.

Puisque la fonction f est continue et strictement monotone sur $\left[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}\right]$. De plus, $f\left(-2-\sqrt{5}\right) < 0$ et $f\left(-2+\sqrt{5}\right) > f(0) = 1 > 0$ (car la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, -2+\sqrt{5}\right] \subset \left[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}\right]$). Donc, la fonction f s'annule exactement une fois sur $\left[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}\right]$, en un certain réel $\beta \in]-2, 0[$. De plus, $f(-1) = \dfrac{1}{3} - 2 - 1 + 1 = -\dfrac{5}{3} < 0$ et donc $-1 < \beta < 0$.

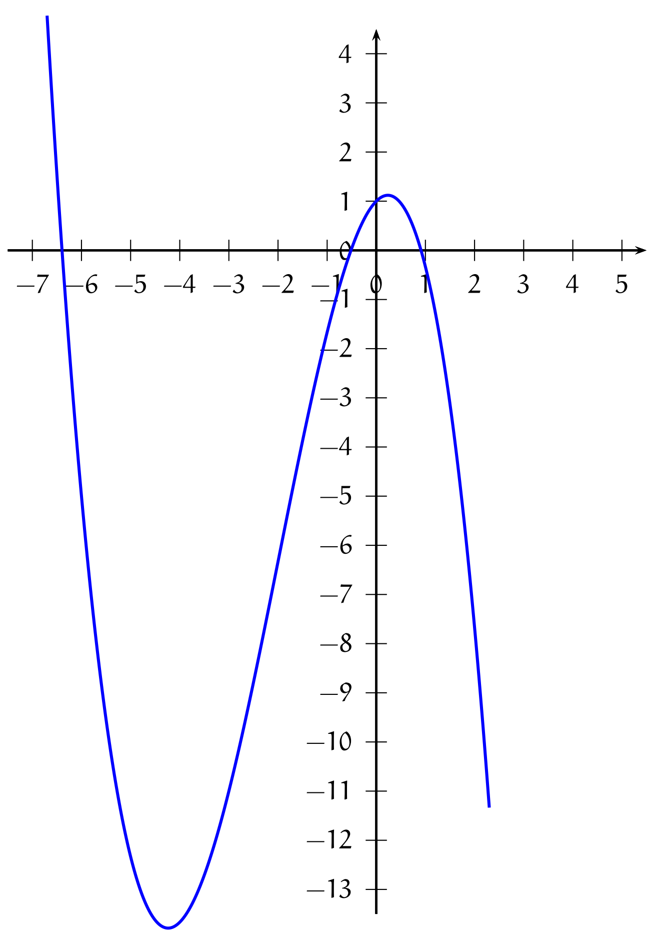
Puisque la fonction f est continue et strictement monotone sur $\left[-2+\sqrt{5}, +\infty\right[$. De plus, $f\left(-2+\sqrt{5}\right) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty < 0$. Donc, la fonction f s'annule exactement une fois sur $\left[-2+\sqrt{5}, +\infty\right[$, en un certain réel $\gamma \in]0, +\infty[$.

Finalement, le polynôme f a exactement trois racines réelles α, β et γ vérifiant de plus $\alpha < -2 < -1 < \beta < 0 < \gamma$.

d) Tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-2-\sqrt{5}\right)$	$\nearrow$	$f\left(-2+\sqrt{5}\right)$	$\searrow$	$+\infty$

Graphe de la fonction f.



2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note C_a la courbe représentative de la fonction f_a.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$f_a(x) = y \Leftrightarrow ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1 = y \Leftrightarrow ax^2(x-3) = 3x^2 - x - 1 - y \Leftrightarrow a = \frac{3x^2 - x - 1 - y}{x^2(x-3)}.$$

Ainsi, tout point du plan d'abscisse distincte de 0 et de 3 appartient à une courbe C_a et une seule.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. $f_a(3) = y \Leftrightarrow 0 \times a = -y - 23$. Cette équation n'a pas de solution si $y \neq -23$ et admet tout réel a pour solution si $y = -23$.

c) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

• D'après la question 2)a), si $x \notin \{0, 3\}$, alors M appartient à une courbe C_a et une seule. Un tel point n'appartient donc pas à toutes les courbes C_a.

• D'après la question 2)b), pour $y \in \mathbb{R}$, le point $M(3, y)$ appartient à toutes les courbes C_a, $a \in \mathbb{R}$, si et seulement si $y = -23$.

• Enfin, pour tout réel a, $f_a(0) = 1$.

Finalement, il existe exactement deux points communs à toutes les courbes C_a, $a \in \mathbb{R}$, à savoir le point $M_1(0, 1)$ et le point $M_2(3, -23)$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f_a'(x) = 3ax^2 - 6(a+1)x + 1$. Donc, $f_a(0) = 1$ et $f_a'(0) = 1$. La tangente (T) à la courbe C_a en le point $M_1(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$.

En particulier, toutes les courbes C_a ont la même tangente en $M_1(0, 1)$.

Exercice 3

1. Pour tout réel x non nul, $x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = 2\dfrac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}}$ puis

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} 2\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}} = 2\lim_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 2.$$

De même, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = \lim_{x \to -\infty} 2\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}} = 2\lim_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 2.$

2. On note C_f la courbe représentative de la fonction f. La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}^*$.

• Pour tout réel x non nul $f(x) = (x-1)e^{\frac{2}{x}} = x + x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - e^{\frac{2}{x}}$. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - e^{\frac{2}{x}}\right) = 2 - 1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. En additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - e^{\frac{2}{x}}\right) - 1\right) = 0$. Donc, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

• Les résultats sont analogues en $-\infty$: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et de plus $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$. La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe C_f en $-\infty$.

• $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{2}{x}} = \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C_f en 0 à droite.

• $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{2}{x}} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$. Donc, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = (-1) \times 0 = 0$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul,

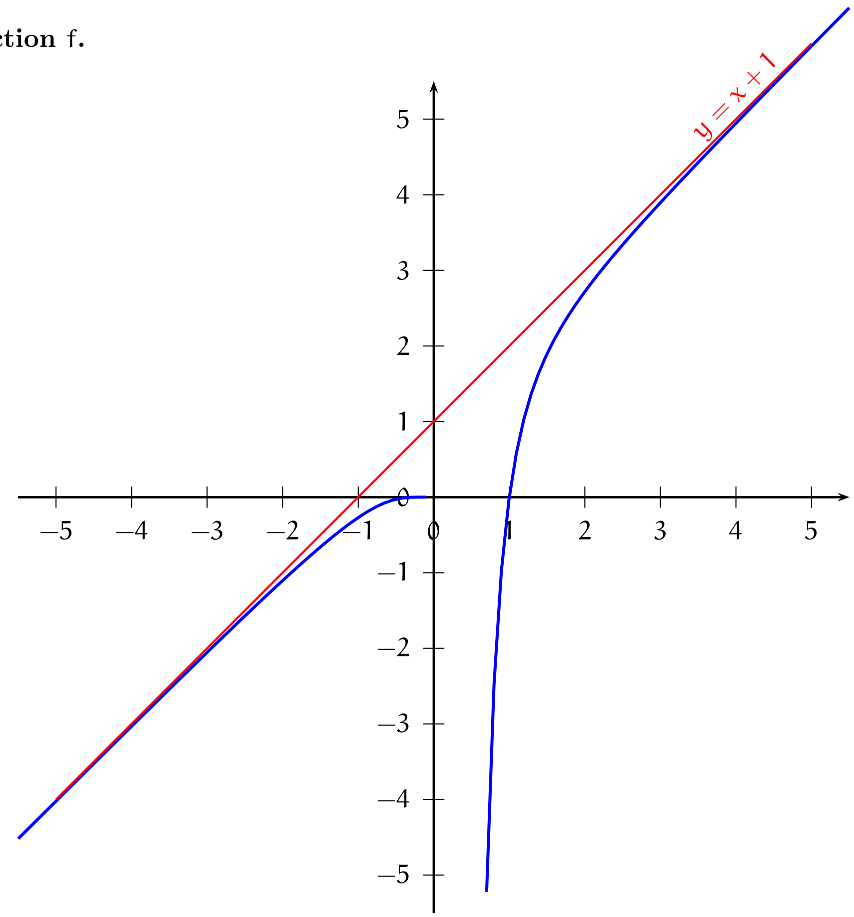
$$f'(x) = 1 \times e^{\frac{2}{x}} + (x-1) \times \left(-\frac{2}{x^2}\right) e^{\frac{2}{x}} = \left(1 - \frac{2(x-1)}{x^2}\right) e^{\frac{2}{x}} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} e^{\frac{2}{x}}.$$

Pour tout réel x non nul, $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x + 2$. Or pour tout réel x, $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
f	$-\infty \nearrow 0$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$

4. Graphe de la fonction f.



5. Soit $t > 1$. Une intégration par parties fournit

$$\int_1^t xe^{\frac{2}{x}}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}e^{\frac{2}{x}}\right]_1^t - \int_1^t \frac{x^2}{2} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right) e^{\frac{2}{x}}\,dx = \frac{t^2e^{\frac{2}{t}} - e^2}{2} + \int_1^t e^{\frac{2}{x}}\,dx.$$

6. D'après la question précédente, pour tout $t > 1$, $\displaystyle\int_1^t f(x)\,dx = \int_1^t (x-1)e^{\frac{2}{x}}\,dx = \frac{t^2e^{\frac{2}{t}} - e^2}{2}$. Cette égalité reste valable si $t \in]0, 1]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2e^{\frac{2}{t}}}{2} - \dfrac{e^2}{2}$ est donc une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$. Une autre primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$ est la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}e^{\frac{2}{t}}$. Les primitives de la fonction f sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}e^{\frac{2}{t}} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

7. La fonction f est continue et positive sur le segment $[1, 2]$. L'aire $\mathscr{A}$ demandée, exprimée en unités d'aire, est donc

$$\mathscr{A} = \int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}e^{\frac{2}{x}}\right]_1^2 = \frac{4e - e^2}{2} = 1,7\ldots.$$

Exercice 4

1. $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\,dx = 1 - [\ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln(2)$. Ensuite,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+x-x-1+1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x de $[0,1]$, $0 \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$ puis $0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}$. Par positivité et croissance de l'intégration, on en déduit que $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,dx$ et donc que

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x différent de -1,

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{1+x}$$

et donc

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{1+x} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x},$$

car les entiers n et $n+2$ ont même parité.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+x}$. On intègre les deux membres de cette égalité sur $[0,1]$ et on obtient

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1} I_{n-1} \text{ (erreur d'énoncé).}$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $(-1)^{n-1}$ et on obtient $(-1)^{n-1}(S_n - \ln(2)) = I_{n-1}$.

5. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - \ln(2)| = I_{n-1}$. D'après la question 2), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_{n-1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n-1} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2).$$

Exercice 5

1. a) $1 = a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant a_1^n$ puis $a_1 \leqslant \sqrt[n]{1} = 1$ par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $[0,+\infty[$. De même, $1 = a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant a_n^n$ et donc $a_n \geqslant \sqrt[n]{1} = 1$. On a montré que $a_1 \leqslant 1$ et $a_n \geqslant 1$.

b) b_1, a_2, ..., a_n sont n réels strictement positifs. Par hypothèse de récurrence, $b_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

c)

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} &= b_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1 - 1 - b_1 + a_1 + a_{n+1} \\
&= (b_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 1 + a_1 - a_1 a_{n+1} - 1 + a_{n+1} \\
&= (b_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 1 + (a_{n+1} - 1) - a_1 (a_{n+1} - 1) \\
&= (b_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \\
&\geqslant n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \text{ (par hypothèse de récurrence).}
\end{aligned}$$

d) D'après la question a) $(a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geqslant 0$. Mais alors, toujours sous l'hypothèse $\mathcal{P}_n$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \geqslant n + 1$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. D'autre part, pour $n = 1$, si $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \geqslant 1$ et donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Le résultat est démontré par récurrence.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $x_1, \ldots, x_n$, n réels strictement positifs. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{x_k}{(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}$. $a_1, \ldots, a_n$, sont n réels strictement positifs et de plus,

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \frac{x_1 \ldots x_n}{\left((x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}\right)^n} = 1.$$

D'après la question 1), $a_1 + \ldots + a_n \geqslant n$. Ceci fournit $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}} \geqslant n$ ou encore

$$\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \geqslant (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$.

$$\left(1 \times x \times x^2 \times \ldots \times x^{2n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \left(x^{1+2+\ldots+2n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = x^{\frac{2n(2n+1)}{2(2n+1)}} = x^n.$$

b) D'après la question 2), $x^n = \left(1 \times x \times x^2 \times \ldots \times x^n\right)^{\frac{1}{2n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}\left(1 + x + \ldots + x^{2n}\right)$ et donc

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

Exercice 6

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \mathcal{Q}$.

- $z_0 \in \mathcal{Q}$ et donc le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $z_n \in \mathcal{Q}$. Posons $z_n = a_n + ib_n$ où a_n et b_n sont deux réels strictement positifs. Alors,

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right) = a_{n+1} + ib_{n+1}$$

où $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right)$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n$. Par hypothèse de récurrence, $a_n > 0$ et $b_n > 0$ et on en déduit que $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$ puis que $z_{n+1} \in \mathcal{Q}$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \mathcal{Q}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n \neq 0$, on sait qu'il existe un unique réel strictement positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in [0, 2\pi[$ tel que que $z_n = \rho_n(\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n))$. De plus $\cos(\theta_n) > 0$ et $\sin(\theta_n) > 0$ (car $z_n \in \mathcal{Q}$) et donc le réel θ_n est élément de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{1}{2}(\rho_n(\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n)) + \rho_n) = \frac{\rho_n}{2}(1 + \cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n)) \\ &= \frac{\rho_n}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right) \\ &= \rho_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Puisque $\theta_n \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, il en est de même de $\dfrac{\theta_n}{2}$ et donc $\cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) > 0$. En prenant le module des deux membres de l'égalité, on obtient

$$\rho_{n+1} = |z_{n+1}| = \rho_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$

Après simplification par le réel non nul ρ_{n+1}, il reste $\cos(\theta_{n+1}) + i\sin(\theta_{n+1}) = \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)$ puis $\cos(\theta_{n+1}) = \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)$ et $\sin(\theta_{n+1}) = \sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)$ et donc $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ car θ_{n+1} et $\dfrac{\theta_n}{2}$ sont dans $[0, 2\pi[$.

On a montré que $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n)) = 1 + 0 \times i = 1$.

Ensuite, la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) < 1$ car $\dfrac{\theta_n}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_{n+1} < \rho_n$ (car $\rho_n > 0$) et donc que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

La suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \geqslant 0$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \rho_n(\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n))$, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell \times 1 = \ell$.

Exercice 7

1. a) Il y a $C_{n+8}^2 = \dfrac{(n+8)(n+7)}{2}$ tirages simultanés de deux boules dans une une urne contenant $n+8$ boules. Parmi ces tirages, il y a $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ tirages de deux boules bleues, $C_5^2 = \dfrac{5\times 4}{2} = 10$ tirages de deux boules rouges et $C_3^2 = 3$ tirages de deux boules jaunes. Les différents tirages étant équiprobables,

- la probabilité d'obtenir deux boules bleues est $\dfrac{C_n^2}{C_{n+8}^2} = \dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$,
- la probabilité d'obtenir deux boules rouges est $\dfrac{C_5^2}{C_{n+8}^2} = \dfrac{20}{(n+8)(n+7)}$,
- la probabilité d'obtenir deux boules jaunes est $\dfrac{C_3^2}{C_{n+8}^2} = \dfrac{6}{(n+8)(n+7)}$.

L'événement « obtenir deux boules de même couleur » est la réunion disjointe des événements « obtenir deux boules bleues », « obtenir deux boules rouges » et « obtenir deux boules jaunes ». Donc,

$$p_n = \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} + \frac{20}{(n+8)(n+7)} + \frac{6}{(n+8)(n+7)} = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}.$$

b) La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 1.$$

Ceci signifie que si n est grand, il est presque certain d'obtenir deux boules de même couleur.

2. a) 10 expériences identiques et indépendantes (car les différents tirages de deux boules s'effectuent avec remise) sont effectuées. Chaque expérience a deux issues à savoir « on obtient deux boules de même couleur » avec une probabilité $p_n = \dfrac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$ et « on n'obtient pas deux boules de même couleur » avec une probabilité $1 - p_n = \dfrac{16n+30}{(n+8)(n+7)}$.

La variable X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et p_n. Par suite, l'ensemble des valeurs prises par X est $[\![0, 10]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$, $P(X = k) = C_{10}^k p_n^k (1-p_n)^{10-k}$.

b) $r_n = P(X = 9) = C_{10}^9 \left(\dfrac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}\right)^9 \left(\dfrac{16n+30}{(n+8)(n+7)}\right)^1 = \dfrac{60\left(n^2-n+26\right)^9 (n+5)}{(n^2+15n+56)^{10}}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{60n^{19}}{n^{20}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{60}{n} = 0$.

Ainsi, si n est grand, il n'y a presque aucune chance d'obtenir exactement 9 fois deux boules de même couleur.

