ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R ***l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.***

Exercice n° 1

Soit la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de A (noté $Ker\,A$) et de l'image de A (notée $\operatorname{Im} A$).

2. Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme associé à A ?

3. Calculer A^n, pour tout $n \in N$.

4. Soit la matrice B définie par : $B = 2A - I$, où I désigne la matrice unité d'ordre 4.
- Calculer B^n, pour tout $n \in N$.
- Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme associé à B ?

Exercice n° 2

Soient u et v deux endomorphismes de R^n de matrices respectives A et B dans la base canonique de R^n. On considère l'endomorphisme w de R^{2n} dont la matrice dans la base canonique de R^{2n} s'écrit par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

1. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix}$, où I désigne la matrice unité d'ordre n.

- Exprimer le déterminant $\det w$ en fonction de $\det(u+v)$ et $\det(u-v)$.
- Donner une relation de même type pour le polynôme caractéristique de w.

2. On suppose que u et v sont diagonalisables dans R^n et que de plus $u o v = v o u$.
Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à u et v.

3. On suppose toujours que u et v sont diagonalisables dans R^n tels que $u o v = v o u$.
- Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonalisables.
- Montrer que w est diagonalisable.

4. Soit $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

- Diagonaliser M.
- On pose $A = I + M$ et $B = M^4$. La matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice n° 3

Soit l'équation générale du troisième degré de la forme :

$$(1) \quad u^3 + au^2 + bu + c = 0$$

où a, b, c sont des paramètres réels.

1. En posant $u=x+h$, déterminer la valeur de h pour que l'équation (1) soit équivalente à l'équation suivante (on explicitera p et q) :

$$(2) \quad x^3 + px + q = 0.$$

2. On cherche à résoudre l'équation (2) en posant : $x = y + z$ et $3yz + p = 0$ (y et z sont deux autres inconnues). Trouver une équation équivalente à (2) en fonction de y et z.

3. Montrer que y^3 et z^3 sont des solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.

4. Résoudre dans C (ensemble des nombres complexes), l'équation :

$$8u^3 - 12u^2 - 18u + 19 = 0$$

Exercice n° 4

On note E l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle trois fois dérivables et

$$F = \left\{ f \in E \,/\, f(x) = f^{(3)}(x) - 3f^{(2)}(x) + 3f'(x) \;\; \forall x \in R \right\}.$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in F$ à partir de la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

2. Vérifier que F est un sous espace vectoriel de E et trouver une base de F.

3. Montrer que si $f \in F$, alors sa dérivée $f^{'} \in F$.

4. Soit $D : F \to F$ définie par : $D(f) = f^{'}$.

- Expliciter la matrice de D dans la base trouvée à la question 2.
- Déterminer l'inverse de D si cette matrice existe.
- Calculer $D^n \quad \forall n \in N^*$.

Exercice n° 5

On considère la fonction $f : R^2 \to R^2$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^n}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$, où n est un entier naturel non nul.

1. Etudier la continuité de f.

2. Etudier la différentiabilité de f en (0, 0).

3. Pour x>0 et n>3, on pose $I_x = \int_1^2 f(x, y)\,dy$. Expliciter I_x.

Exercice n° 6

On considère la fonction $f : R \to R$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{\sqrt{x}} Arctg \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1+x}{2\sqrt{-x}} Ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| & \text{si } x < 0, x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? en -1 ?

3. Montrer que pour $|x| < 1$, $f(x)$ est la somme d'une série entière. Soit $a_n x^n$ le terme général de cette série, préciser a_n en fonction de n.