**SESSION 2020**

# CAPESA
# ISE Option mathématiques

DEUXIEME COMPOSITION

## Exercice 1

**1.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-2z+3t=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -y+z-t=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x+2y \\ x+y-2(-x+2y)+3t=0 \\ -y+(-x+2y)-t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x+2y \\ 3x-3y+3t=0 \\ -x+y-t=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x+2y \\ t=-x+y \end{array}\right. .$$

Ainsi, $\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \\ -x+y \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\,(U_1, U_2)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après le théorème du rang, $\dim\,(\text{Im}(M)) = 4-2 = 2$. Les vecteurs $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\text{Im}(M)$ ($U_3 = 3C_1$ et $U_4 = C_4$ où $C_1, \ldots, C_4$, sont les colonnes de $M$). Donc, $(U_3, U_4)$ est une base de $\text{Im}(M)$ et en particulier $\text{Im}(M) = \text{Vect}\,(U_3, U_4)$.

**2.** On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ puis $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice $A$.

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 & 9 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -9 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Donc, $f^2 = f$. Plus précisément, d'après la question 1), $f$ est la projection sur $F = \text{Im}(f) = \text{Vect}\,(u_3, u_4)$ sur $G = \text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,0,-1,-1)$, $u_2 = (0,1,2,1)$, $u_3 = (1,-1,0,1)$ et $u_4 = (1,0,-1,0)$.

**3.** Mais alors, $A^0 = A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

**4.** Soit $g$ l'endomrophisme de $\mathscr{R}^4$ canoniquement associé à la matrice $B$. Alors, $g = 2f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ et on sait que $g$ est la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B^{2p} = \left(B^2\right)^p = I_4$ et $B^{2p+1} = B^{2p} \times B = B$.

## Exercice 2

On pose $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

**1.** Un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & B+A \\ B-A & A \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $\det\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = (\det\,(I_n))^2 = 1$ puis

$$\det\begin{pmatrix} 0_n & A+B \\ B-A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix}.$$

 

Dans le déterminant $\det\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix}$, on effectue les transformations $C_j \leftarrow C_j + C_{j+n}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient

$$\det\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-B+B & B \\ B-A+A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(C)$$

(on peut aussi constater que $\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$). Ainsi,

$$\det(C) = \det\begin{pmatrix} 0_n & A+B \\ B-A & A \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\begin{pmatrix} 0_n & A+B \\ B-A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & 0_n \\ A & A-B \end{pmatrix}$. D'autre part, en effectuant les $n$ transpositions $C_j \leftrightarrow C_{n+j}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det(-I_n) \times \det(I_n) = 1$$

et donc

$$\det(C) = \det\begin{pmatrix} 0_n & A+B \\ B-A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & 0_n \\ A & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B) \times \det(A-B).$$

On a montré que $\det(w) = \det(u+v) \times \det(u-v)$. Ensuite, en remplaçant $A$ par $A - XI_n$,

$$\chi_w = \det\begin{pmatrix} A-XI_n & B \\ B & A-XI_n \end{pmatrix} = \det(A - XI_n + B) \times \det(A - XI_n - B) = \chi_u \times \chi_v.$$

**2.** $u$ est diagonalisable et donc $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Toute base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à cette décomposition est une base constituée de vecteurs propres de $u$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Puisque $v \circ u = u \circ v$, $v$ laisse stable $E_\lambda(u)$ et induit donc un endomorphisme $v_\lambda$ de $E_\lambda(u)$. Puisque $v$ est diagonalisable, on sait que $v_\lambda$ est diagonalisable (car il existe un polynôme $P$, scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, annulateur de $v$ et donc annulateur de $v_\lambda$). Soit $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(u)$ constituée de vecteurs propres de $v$.

Soit $\mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda$. $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres communs à $u$ et $v$.

**3.** Soient $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ puis $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres communs à $u$ et $v$. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ les familles de valeurs propres de $u$ et $v$ respectivement associées.

Soit $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$. $P$ est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient des matrices diagonales que l'on note respectivement $D_A$ et $D_B$ ($A$ et $B$ sont simultanément diagonalisables).

On note maintenant $E_1$, ..., $E_n$ les vecteurs colonnes représentant les vecteurs $e_1$, ..., $e_n$ dans la base $\mathscr{B}_0$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$C\begin{pmatrix} E_i \\ E_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_i \\ E_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE_i + BE_i \\ BE_i + AE_i \end{pmatrix} = (\lambda_i + \mu_i)\begin{pmatrix} E_i \\ E_i \end{pmatrix}$$

et

$$C\begin{pmatrix} E_i \\ -E_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_i \\ -E_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE_i - BE_i \\ BE_i - AE_i \end{pmatrix} = (\lambda_i - \mu_i)\begin{pmatrix} E_i \\ -E_i \end{pmatrix}.$$

Donc, les vecteurs $\begin{pmatrix} E_i \\ E_i \end{pmatrix}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\begin{pmatrix} E_i \\ -E_i \end{pmatrix}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont tous des vecteurs propres de la matrice $C$.

Vérifions que la famille $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ -E_n \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Puisque $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = 2n = \dim(\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) < +\infty$, il suffit de vérifier que cette famille est libre. Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

 

$$
\begin{aligned}
&a_1\begin{pmatrix} E_1\\ E_1\end{pmatrix}+\ldots+a_n\begin{pmatrix} E_n\\ E_n\end{pmatrix}+b_1\begin{pmatrix} E_1\\ -E_1\end{pmatrix}+\ldots+b_n\begin{pmatrix} E_n\\ -E_n\end{pmatrix}=0\\
&\qquad\Rightarrow\begin{pmatrix}(a_1+b_1)\,E_1+\ldots+(a_n+b_n)\,E_n\\ (a_1-b_1)\,E_1+\ldots+(a_n-b_n)\,E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\qquad\Rightarrow a_1+b_1=a_1-b_1=\ldots=a_n+b_n=a_n-b_n=0\Rightarrow a_1=\ldots=a_n=b_1=\ldots=b_n=0.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $C$. On en déduit que $C$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ puis que $w$ est un endomorphisme diagonalisable.

**4.** Par linéarité par rapport à chaque colonne,

$$
\begin{aligned}
\chi_M&=\det\left(M-XI_3\right)=\frac{1}{4^3}\begin{vmatrix}-1-4X&1&-7\\-2&2-4X&2\\-3&3&-5-4X\end{vmatrix}=\frac{1}{4^3}\begin{vmatrix}-4X&1&-7\\-4X&2-4X&2\\0&3&-5-4X\end{vmatrix}\ (C_1\leftarrow C_1+C_2)\\
&=\frac{-4X}{4^3}\begin{vmatrix}1&1&-7\\1&2-4X&2\\0&3&-5-4X\end{vmatrix}\ \text{(par linéarité par rapport à la première colonne)}\\
&=-\frac{X}{16}\begin{vmatrix}1&1&-7\\0&1-4X&9\\0&3&-5-4X\end{vmatrix}\ (L_2\leftarrow L_2-L_1)\\
&=-\frac{X}{16}\left((4X-1)(4X+5)-27\right)=-\frac{X}{16}\left((4X-1)(4X+5)-27\right)=-\frac{X}{16}\left((4X-1)(4X+5)-27\right)\\
&=-\frac{X}{16}\left(16X^2+16X-32\right)=-X\left(X^2+X-2\right)=-X(X-1)(X+2).
\end{aligned}
$$

Donc, $\mathrm{Sp}(M)=(-2,0,1)$. Les valeurs propres de $M$ sont simples et donc les sous-espaces propres sont des droites.

• $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}(M)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}7x+y-7z=0\\-2x+10y+2z=0\\-3x+3y+3z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}7x+y-7z=0\\-x+5y+z=0\\-x+y+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\ (\mathrm{II}-\mathrm{III})\\z=x\end{array}\right.$.

Donc, $E_{-2}(M)=\mathrm{Vect}\left(U_1\right)$ où $U_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

• Immédiatement, $E_0(M)=\mathrm{Vect}\left(U_2\right)$ où $U_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

• $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1(M)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-5x+y-7z=0\\-2x-2y+2z=0\\-3x+3y-9z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-5x+y-7z=0\\-x-y+z=0\\-x+y-3z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=x+y\\-5x+y-7x-7y=0\\-x+y-3x-3y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-2x\\z=-x\end{array}\right.$.

Donc, $E_1(M)=\mathrm{Vect}\left(U_3\right)$ où $U_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Finalement,

$$M=PDP^{-1}\text{ où }D=\mathrm{diag}(-2,0,1)\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Calculons $P^{-1}$. En notant $(E_1,E_2,E_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\left\{\begin{array}{l}U_1=E_1+E_3\\U_2=E_1+E_2\\U_3=-E_1+2E_2+E_3\end{array}\right.\Leftrightarrow.\left\{\begin{array}{l}E_3=-E_1+U_1\\E_2=-E_1+U_2\\U_3=-E_1+2\left(-E_1+U_2\right)+\left(-E_1+U_1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}E_1=\dfrac{1}{4}\left(U_1+2U_2-U_3\right)\\E_2=\dfrac{1}{4}\left(-U_1+2U_2+U_3\right)\\E_3=\dfrac{1}{4}\left(3U_1-2U_2+U_3\right)\end{array}\right..$$

 

Donc, $\mathrm{P}^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $M$ est diagonalisable. Mais alors, $A = I_3 + M = I_3 + PDP^{-1} = P(I_3+D)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(-1,1,2)P^{-1}$ et de même, $M^4 = PD^4P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(4,0,1)P^{-1}$. $A$ et $B$ sont simultanément diagonalisable et donc la matrice $\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

## Exercice 3

**1.** Pour tout réel $u$,

$$\begin{aligned}u^3+au^2+bu+c&=(x+h)^3+a(x+h)^2+b(x+h)+c\\&=x^3+(3h+a)\,x^2+\left(3h^2+2ah+b\right)x+\left(h^3++ah^2+bh+c\right).\end{aligned}$$

On prend $h=-\dfrac{a}{3}$. L'équation (1) est alors équivalente à l'équation (2) avec

$$p=3h^2+2ah+b=3\left(-\frac{a}{3}\right)^2+2a\left(-\frac{a}{3}\right)+b=-\frac{a^2}{3}+b$$

et

$$q=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=\frac{1}{27}\left(2a^3-9ab+27c\right).$$

**2.** En posant $x=y+z$,

$$x^3+px+q=(y+z)^3+p(y+z)+q=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=y^3+z^3+q+(y+z)(3yz+p).$$

Si on impose de plus $3yz+p=0$, alors $x^3+px+q=0\Leftrightarrow y^3+z^3+q=0$.

**3.**

$$\begin{cases}y^3+z^3+q=0\\3yz+p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^3+z^3=-q\\yz=-\dfrac{p}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^3+z^3=-q\\y^3z^3=-\dfrac{p^3}{27}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y^3 \text{ et } z^3 \text{ sont les solutions de l'équation } X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0.$$

(Si $y$ et $z$ sont des complexes, l'implication intermédiaire ne peut pas être remplacée par une équivalence).

**4.** Suivons le plan de résolution exposé depuis le début de l'exercice. L'équation à résoudre dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$u^3-\frac{3}{2}u^2-\frac{9}{4}u+\frac{19}{8}=0\quad(E).$$

On pose $u=x+\dfrac{1}{2}$ ou encore $x=u-\dfrac{1}{2}$. Pour tout complexe $u$,

$$\begin{aligned}u^3-\frac{3}{2}u^2-\frac{9}{4}u+\frac{19}{8}&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{19}{8}\\&=x^3+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right)x+\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-\frac{9}{8}+\frac{19}{8}=x^3-3x+1.\end{aligned}$$

Pour tout nombre complexe $u$, $u^3-\dfrac{3}{2}u^2-\dfrac{9}{4}u+\dfrac{19}{8}=0\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$.

Posons $x=y+z$. On a alors $x^3-3x+1=(y+z)^3-3(y+z)+1=y^3+z^3+1+(3yz-3)(y+z)$. On résout le système $\begin{cases}y^3+z^3+1=0\\3yz-3=0\end{cases}$ qui entraine $\begin{cases}y^3+z^3=-1\\y^3z^3=1\end{cases}$. $y^3$ et $z^3$ sont les solutions de l'équation $X^2+X+1=0$. On peut prendre $y^3=j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $z^3=\overline{j}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. Donc, $y\in\left\{e^{\frac{2i\pi}{9}},e^{\frac{8i\pi}{9}},e^{\frac{14i\pi}{9}}\right\}$ et $z\in\left\{e^{-\frac{2i\pi}{9}},e^{-\frac{8i\pi}{9}},e^{-\frac{14i\pi}{9}}\right\}$, ce qui fournit 9 possibilités pour le couple $(y,z)$.

 

Réciproquement, tout couple $(y,z)$ parmi les neuf couples précédents tel que $yz=1$ fournit une solution $x=y+z$ de l'équation (2). Les nombres $x_1=e^{\frac{2i\pi}{9}}+e^{-\frac{2i\pi}{9}}=2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, $x_2=2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ et $x_3=2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)$ sont trois solutions de l'équation (2). De plus, la calculatrice par exemple montre que ces trois nombres sont deux à deux distincts. $x_1$, $x_2$ et $x_3$ sont les trois solutions de l'équation (2).

Mais alors, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}+2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right),\frac{1}{2}+2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right),\frac{1}{2}+2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right\}.$$

# Exercice 4

**1.** Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $g\ :\ x\mapsto e^{-x}f(x)$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque pour tout réel $f(x)=e^xg(x)$, d'après la formule de Leibniz, pour tout réel $x$, $f'(x)=(g(x)+g'(x)e^x$, $f''(x)=(g''(x)+2g'(x)+g(x))e^x$ et $f^{(3)}(x)=\left(g^{(3)}(x)+3g''(x)+3g'(x)+g(x)\right)e^x$. Mais alors, pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned}&f^{(3)}(x)-3f''(x)+3f'(x)-f(x)\\&\qquad=\left(\left(g^{(3)}(x)+3g''(x)+3g'(x)+g(x)\right)-3(g''(x)+2g'(x)+g(x))+3(g(x)+g'(x))-g(x)\right)e^x\\&\qquad=g^{(3)}(x)e^x.\end{aligned}$$

Par suite, $f\in F\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ g^{(3)}(x)e^x=0\Leftrightarrow g^{(3)}=0$.

**2.** Vérifions que F est un sous-espace vectoriel de $\left(D^3(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.\right)$. La fonction nulle est dans F. Soient $(f_1,f_2)\in F^2$ et $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}&(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)^{(3)}-3\left(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\right)''+3\left(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\right)'-\left(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\right)\\&\qquad=\lambda_1\left(f_1^{(3)}-3f_1''+3f_1'-f_1\right)+\lambda_2\left(f_2^{(3)}-3f_2''+3f_2'-f_2\right)=0\end{aligned}$$

et donc $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\in F$. On a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\left(D^3(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.\right)$.

Ensuite, avec les notations de la question 1), pour $f\in D^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}f\in F\Leftrightarrow g^{(3)}=0&\Leftrightarrow\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=ax^2+bx+c\\&\Leftrightarrow\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x.\end{aligned}$$

Donc, si pour tout réel $x$, on pose $f_0(x)=e^x$, $f_1(x)=xe^x$ et $f_2(x)=x^2e^x$, alors $F=\mathrm{Vect}\left(f_0,f_1,f_2\right)$. Vérifions que la famille $(f_0,f_1,f_2)$ est libre. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$af_2+bf_1+cf_0=0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ \left(ax^2+bx+c\right)e^x=0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ ax^2+bx+c=0\Rightarrow a=b=c=0.$$

La famille $(f_0,f_1,f_2)$ est libre et donc la famille $(f_0,f_1,f_2)$ est une base de F. En particulier, F est un espace vectoriel de dimension 3.

**3.** Soit $f\in F$. Alors $f^{(3)}=3f''-3f'+f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis $f'$ est trois dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui est d'ailleurs immédiat à partir de l'expression des solutions). En dérivant l'égalité $f^{(3)}-3f''+3f'-f=0$, on obtient $(f')^{(3)}-3(f')''+3(f')-f'=0$ et donc $f'\in F$.

**4.** Ainsi, D est bien une application de F dans lui-même. La dérivation étant linéaire, D est un endomorphisme de F.

$D\left(f_0\right)=f_0$, $D\left(f_1\right)=f_0+f_1$ et $D\left(f_2\right)=2f_1+f_2$. Donc,

$$\mathrm{Mat}_{(f_0,f_1,f_2)}(D)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=A.$$

$\det(A)=1\neq0$ et donc la matrice A est inversible puis D est un automorphisme de F. Ensuite, $D^{-1}\left(f_0\right)=f_0$, $D^{-1}\left(f_1\right)=f_1-D^{-1}\left(f_0\right)=f_1-f_0$ et $D^{-1}\left(f_2\right)=f_2-2D^{-1}\left(f_1\right)=f_2-2f_1+2f_0$. Donc,

$$A^{-1}=\mathrm{Mat}_{(f_0,f_1,f_2)}\left(D^{-1}\right)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

 

Ensuite, $A = I_3 + N$ où $N = E_{1,2} + 2E_{2,3}$. $N^2 = (E_{1,2} + 2E_{2,3})(E_{1,2} + 2E_{2,3}) = 2E_{1,3}$ puis $N^3 = 2(E_{1,2} + 2E_{2,3})E_{1,3} = 0_3$. La matrice $N$ est nilpotente d'indice 3.

Soit $n \geqslant 2$. Les matrices $I_3$ et $N$ commutent et donc, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= (I_3 + N)^n = I_3^n + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = I_3 + n(E_{1,2} + 2E_{2,3}) + n(n-1)E_{1,3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$ (ou même $n = 0$). Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Exercice 5

**1.** $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tan que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

**1er cas.** Si $n = 1$, pour tout $x \neq 0$, $f(x,0) = \dfrac{x}{x^2 + 0^2} = \dfrac{1}{x}$. Quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures, $(x,0)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers $+\infty$. $f$ n'a pas de limite en $(0,0)$ et n'est donc pas continue en $(0,0)$.

**2ème cas.** Si $n = 2$, pour tout $x \neq 0$, $f(x,0) = \dfrac{x^2}{x^2 + 0^2} = 1$. Quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures, $(x,0)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers $1 \neq f(0,0)$. $f$ n'est donc pas continue en $(0,0)$.

**3ème cas.** Si $n \geqslant 3$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$|f(x,y)| = |x|^{n-2}\frac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant |x|^{n-2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x|^{n-2}.$$

Puisque $n - 2 \geqslant 1$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} |x|^{n-2} = 0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Dans ce cas, $f$ est continue en $(0,0)$.

En résumé, si $n \in \{1,2\}$, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et n'est pas continue en $(0,0)$ et si $n \geqslant 3$, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**2.** Si $f$ est différentiable en $(0,0)$, $f$ est continue en $(0,0)$ et donc nécessairement $n \geqslant 3$. Soit donc $n$ un entier supérieur ou égal à 3.

Ensuite, si $f$ est différentiable en $(0,0)$, alors nécessairement $f$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ par rapport à chacune de ses deux variables et de plus $df_{(0,0)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy$.

Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^n}{x^2 + 0^2} = x^{n-3}$ puis $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0}$ tend vers $1$ quand $x$ tend vers $0$ si $n = 3$ et tend vers $0$ si $n > 3$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 3 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 4 \end{cases}$.

Pour tout réel $y \neq 0$, $\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \dfrac{0}{y^2} = 0$ puis $\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0}$ tend $0$ quand $y$ tend vers $0$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Donc, si $f$ est différentiable en $(0,0)$, nécessairement $df_{(0,0)} = dx$ si $n = 3$ et $df_{(0,0)} = 0$ si $n \geqslant 4$.

Soit $n \geqslant 4$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

 

$$\left|\frac{1}{\|(h,k)\|_2}\left(f(0+h,0+k)-f(0,0)-(0\times h+0\times k)\right)\right| = \frac{|h|^n}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = |h|^{n-3}\times\frac{|h|^3}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\leqslant |h|^{n-3}\frac{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = |h|^{n-3}.$$

Cette dernière expression tend vers $0$ (car $n-3\geqslant 1$) quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$. Dans ce cas, $f$ est différentiable en $(0,0)$ et $df_{(0,0)}=0$.

Etudions maintenant le cas $n=3$. Pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{1}{\|(h,k)\|_2}\left(f(0+h,0+k)-f(0,0)-(1\times h+0\times k)\right) = \frac{h^3}{h^2+k^2}-h = -\frac{hk^2}{h^2+k^2}.$$

Maintenant, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, $(|h|-|k|)^2\geqslant 0$ puis $|hk|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(h^2+k^2\right)$ et donc pour $(h,k)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\left|\frac{1}{\|(h,k)\|_2}\left(f(0+h,0+k)-f(0,0)-(1h+0k)\right)\right| = |k|\frac{|hk|}{h^2+k^2}\leqslant\frac{|k|}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers $0$ quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$. Dans ce cas aussi, $f$ est différentiable en $(0,0)$ et $df_{(0,0)}=dx$.

En résumé, la fonction $f$ est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $n\geqslant 3$.

**3.** Soient $x>0$ et $n\geqslant 4$. La fonction $y\mapsto f(x,y)$ est continue sur le segment $[1,2]$ et donc $I_x$ existe.

$$I_x=\int_1^2\frac{x^n}{x^2+y^2}\,dy = x^n\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=1}^{y=2} = x^{n-1}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{x}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

# Exercice 6

**1.** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$ en vertu de théorèmes généraux.

**Etude en $0$.** $f(x)\underset{x\to 0,\ x>0}{=}(1+x)\dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\underset{x\to 0,\ x>0}{\sim}1\times 1=1$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=f(0)$. $f$ est continue en $0$ à droite.

Puisque $\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\underset{x\to 0,\ x<0}{\rightarrow}1$,

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|\underset{x\to 0,\ x<0}{=}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)\underset{x\to 0,\ x<0}{\sim}\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}-1=\frac{2\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\underset{x\to 0,\ x<0}{\sim}2\sqrt{-x}$$

puis,

$$f(x)\underset{x\to 0,\ x<0}{\sim}1\times\frac{2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}=1.$$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=f(0)$. $f$ est continue en $0$ à gauche et finalement continue en $0$.

**Etude en $-1$.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x}{2\sqrt{-x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to -1}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|=+\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$. $f$ n'est pas continue en $-1$.

Finalement, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et n'est pas continue en $-1$.

**2.** $f$ n'est pas continue en $-1$ et donc pas dérivable en $-1$.

$f(x)\underset{x\to 0^+}{=}\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)\underset{x\to 0^+}{=}\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-\dfrac{x\sqrt{x}}{3}+o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\right)\underset{x\to 0^+}{=}(1+x)\left(1-\dfrac{x}{3}+o(x)\right)\underset{x\to 0^+}{=}1+\dfrac{2x}{3}+o(x)$.

En tenant compte de $f(0)=1$, $f$ admet un développement limité d'ordre $1$ à droite en $0$ et donc $f$ est dérivable à droite en $0$ avec $f'_d(0)=\dfrac{2}{3}$.

Ensuite,

 

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| &\underset{x\to 0^-}{=} \left(\ln\left(1+\sqrt{-x}\right)-\ln\left(1-\sqrt{-x}\right)\right)\\ &\underset{x\to 0^-}{=} \left(\left(\sqrt{-x}-\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3}+o\left(|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right)+\left(\sqrt{-x}+\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3}+o\left(|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right)\right)\\ &\underset{x\to 0^-}{=} 2\left(\sqrt{-x}+\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3}+o\left(|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right)\end{aligned}$$

puis

$$f(x)\underset{x\to 0^-}{=}\frac{1+x}{2\sqrt{-x}}\times 2\left(\sqrt{-x}+\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3}+o\left(|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right)\underset{x\to 0^-}{=}(1+x)\left(1-\frac{x}{3}+o(x)\right)\qquad\underset{x\to 0^-}{=}1+\frac{2x}{3}+o(x).$$

$f$ est dérivable à gauche en $0$ avec $f'_g(0)=\dfrac{2}{3}$. Finalement, $f$ est dérivable à droite et à gauche en $0$ et $f'_g(0)=f'_d(0)=\dfrac{2}{3}$.
On en déduit que $f$ est dérivable en $0$ et $f'(0)=\dfrac{2}{3}$.

**3.** Soit $x\in]0,1[$.

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1+x}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2k+1}}{2k+1}=(1+x)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{2k+1}\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{2k+1}+\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{2k+1}\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{2k+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{2(k-1)+1}\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{2k+1}-\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{2k-1}\\ &=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)x^k=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}x^k,\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $x=0$.
Soit $x\in]-1,0[$.

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|&=\ln\left(1+\sqrt{-x}\right)-\ln\left(1-\sqrt{-x}\right)\\ &=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^p}{p}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^p}{p}\\ &\sum_{p=1}^{+\infty}\left(1+(-1)^{p-1}\right)\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^p}{p}\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}2\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2k+1}}{2k+1}\end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2k}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{2k+1}$$

et finalement, de nouveau

 

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} x^k.$$

Ainsi, pour tout $x \in ]-1, 1[$, $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} x^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)},$$

(et $a_0 = 1$).

 