ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier l'existence de solutions à des systèmes différentiels. Les parties sont complètement indépendantes. La partie I traite de l'existence de solutions pour des systèmes linéaires. La partie II traite de l'existence de solutions pour des systèmes non-linéaires. Enfin la partie III étudie un système non-linéaire d'équations différentielles proposé par Lotka et Volterra pour l'étude des populations d'espèces animales.

Partie I

1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = -t$$

telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

3. Soit f la fonction définie par
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t,x) & \mapsto & tx \end{array}.$$
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ vérifiant $y(0) = \alpha$.

4. Sans chercher à la calculer explicitement, montrer que, pour un triplet de données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution au système différentiel suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -z \\ z' & = & y - x + z \end{array} \right. \qquad \text{vérifiant} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \\ z(0) & = & z_0 \end{array} \right. .$$

5. Calculer une solution explicite au système différentiel précédent pour un triplet de données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que le système différentiel précédent n'admette que des solutions périodiques.

Partie II

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence de solutions pour des systèmes non-linéaires posés sous la forme d'un problème de Cauchy. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne de constante de Lipschitz $L \in \mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

7. Montrer que si f est globalement lipschitzienne, alors la constante
$$L_f := \inf\{L \in \mathbb{R} : \forall\ x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\}$$
existe.

8. Montrer que f est lipschitzienne pour la constante de Lipschitz L_f.

9. Montrer que la fonction suivante est globalement lipschitzienne :
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\sin(x))^3 \end{array}.$$

10. Trouver le maximum et le minimum de
$$G: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy^2 \end{array}$$
sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

11. En déduire la plus petite constante de Lipschitz de f.

12. Montrer qu'il existe des solutions aux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y' &= (\sin(y))^3 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} z' &= (\sin(z))^3 \\ z(0) &= \pi \end{cases} .$$

13. Montrer que la solution y du premier problème vérifie pour tout $t \geq 0$

$$0 < y(t) < \pi.$$

14. Montrer que la solution y du premier problème vérifie pour tout $t \geq 0$

$$y'(t) \leq L_f \ (\pi - y(t)).$$

Partie III

On fixe des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ strictement positives et on considère des données initiales (x_0, y_0) dans le quadrant $Q := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0\} = \mathbb{R}^2_+$. On appelle système de Lotka-Volterra, le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ y'(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \\ x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

On admet que ce système admet une unique solution (x, y), définie sur $\mathbb{R}$. De plus on admet que si deux solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) du système

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ y'(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \end{cases}$$

coïncident en un temps $t_0 \in \mathbb{R}$ alors elles sont égales.

15. Montrer que si (x, y) est une solution de donnée initiale $(x_0, y_0) \in Q$, on a $(x(t), y(t)) \in Q$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Indication : Pour ce faire, on pourra considérer le premier instant $t^* \geq 0$ pour lequel $y(t^*) = 0$ (ou de manière symétrique $x(t^*) = 0$), et étudier les solutions qui partent de données initiales situées sur les axes des ordonnées ou des abscisses.

16. Toujours dans le quadrant $Q = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0\}$, trouver les points stationnaires, c'est-à-dire les points $(x^*, y^*) \in Q$ tels que les solutions $(x(t), y(t))$ de données initiales (x^*, y^*) restent constantes.

17. Calculer la différentielle de l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ -\gamma y + \delta xy \end{pmatrix} \end{array} .$$

18. Calculer les valeurs propres de la matrice représentant la différentielle aux points stationnaires trouvés à la question 16.

19. On pose V la fonction, définie sur $\mathring{Q} := (\mathbb{R}_+^*)^2$, telle que

$$V : \begin{array}{ccc} \mathring{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y). \end{array}$$

Montrer que la fonction V est constante le long des trajectoires qui sont solutions du système différentiel de Lotka-Volterra avec des données initiales $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

20. Soit $(x_0, y_0) \in \mathring{Q}$ tel que $\beta y_0 \neq \alpha$. Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in \mathcal{U}$, et un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathring{Q}$ tel que $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, tels que l'ensemble

$$V_0 := \{(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : V(a,b) = V(x_0,y_0)\}$$

vérifie

$$\Big[(a,b) \in \mathcal{O} \text{ et } (a,b) \in V_0\Big] \Leftrightarrow \Big[a \in \mathcal{U} \text{ et } b = \phi(a)\Big].$$

21. Calculer la différentielle de ϕ au point x_0.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des idéaux d'anneaux tels que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\imath]$ et $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. La première partie détaille la structure d'anneau de $\mathbb{Z}[\imath]$. La deuxième partie s'intéresse à certains idéaux particuliers de $\mathbb{Z}$. La troisième partie s'intéresse aux idéaux de $\mathbb{K}[X]$ et le lien avec les endomorphismes.

On rappelle qu'un nombre $p \in \mathbb{N}$ est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ qui sont donc nécessairement 1 et p. Les nombres 0, 1, 4 et 6 ne sont donc pas des nombres premiers, alors que 2, 3 et 5 le sont. L'ensemble $\mathbb{Z}[\imath]$ est défini par

$$\mathbb{Z}[\imath] = \left\{ a + b\, i\sqrt{5} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X construit sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{k=0}^{p} z_k X^k : p \in \mathbb{N}, (z_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{K}^{p+1} \right\}$$

et pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_p[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à p.

Soit un entier naturel $d \in \mathbb{N}$, on note $End(\mathbb{K}^d)$ l'ensemble des endomorphismes sur $\mathbb{K}^d$. Pour un entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on note f^p l'application $f \circ \cdots \circ f$ composée p fois avec la convention $f^0 = Id_{\mathbb{K}^d}$. Et pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $P(f)$ l'application $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} z_k f^k$.

Partie I

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\imath]$ possède une structure naturelle d'anneau pour les lois usuelles.

2. Montrer qu'on peut représenter un élément $x \in \mathbb{Z}[\imath]$ par un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[\imath] & \to & \mathbb{Z}^2 \\ x & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

est un morphisme d'anneau de $(\mathbb{Z}[\imath], +, \times)$ dans $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \otimes)$. On précisera les lois $\oplus$ et $\otimes$ s'il y a lieu.

3. Montrer que ϕ est un isomorphisme d'anneaux.

4. Montrer que $\mathbb{Z}[\imath]$ n'est pas un corps.

5. Montrer qu'il existe une matrice carrée M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}[\imath])$ (on précisera les valeurs des 4 coefficients $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, $M_{2,1}$ et $M_{2,2}$) telle que pour tous $(x, y) \in \mathbb{Z}[\imath]^2$

$$x \times y = \phi(x) M \phi(y)^T,$$

où les opérations de multiplications du membre de droite sont les opérations naturelles de multiplication matrice/vecteur.

6. Grâce à la matrice M, on construit l'application suivante :

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, y_1, y_2) & \mapsto & M_{1,1}x_1y_1 + M_{1,2}x_2y_1 + M_{2,1}x_1y_2 + M_{2,2}x_2y_2. \end{array}$$

Montrer que cette application est une forme bilinéaire.

7. Montrer qu'il existe une forme quadratique $q : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{C}$ telle que pour tous $(x, y) \in (\mathbb{K}^2)^2$

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x + y) - q(x - y)\right).$$

8. Montrer que, par analogie avec la construction de Ψ et q sur $\mathbb{K}^2$, on peut définir une application $\overline{\Psi} : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[\imath]$ et une application $\overline{q} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[\imath]$ telles que pour tous $(x, y) \in \mathbb{Z}[\imath]^2$

$$\overline{q}(\phi(x + y)) - \overline{q}(\phi(x - y)) = \phi(2x) M \phi(2y)^T = (2x) \times (2y) = 4\overline{\Psi}(\phi(x), \phi(y)).$$

Partie II

Pour un anneau quelconque $(\mathbb{A}, +, \times)$, on définit pour tout $a \in \mathbb{A}$ l'ensemble

$$a\mathbb{A} = \{c \in \mathbb{A} : \exists\ b \in \mathbb{A} \text{ tel que } c = a \times b\}.$$

Pour $c \in \mathbb{A}$, on dira qu'un ensemble $c\mathbb{A}$ est indécomposable :

— s'il est différent des deux ensembles triviaux $\{0_{\mathbb{A}}\}$ et $\mathbb{A}$,
— s'il vérifie la propriété (P) suivante :

$$\text{Pour tout } a, b \in \mathbb{A}, \text{ si } a \times b \in c\mathbb{A}, \text{ alors } a \in c\mathbb{A} \text{ ou } b \in c\mathbb{A}. \tag{P}$$

10. Montrer que pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

11. Montrer que pour deux idéaux I et J de $\mathbb{A}$, alors l'ensemble suivant est un idéal de $\mathbb{A}$:

$$I \cap J := \{a \in \mathbb{A} : a \in I \text{ et } a \in J\}.$$

12. Montrer que pour tout nombre premier $p \in \mathbb{N}$, l'idéal $p\mathbb{Z}$ est indécomposable.

13. Montrer que $6\mathbb{Z}$ ne vérifie pas la propriété (P), c'est-à-dire qu'il est "décomposable".

14. Trouver deux idéaux I et J indécomposables tels que

$$I \cap J = 6\mathbb{Z}.$$

15. Montrer que pour tout idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une famille finie d'idéaux $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ vérifiant tous la propriété (P) tels que

$$n\mathbb{Z} \subset \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

16. Montrer que l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie. C'est-à-dire qu'il existe un idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$ tel que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et toute famille finie d'idéaux indécomposables $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ telle que

$$n\mathbb{Z} \subset \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

il existe $m \in \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ tel que n ne divise pas m.

La notion de décomposables n'étant pas compatibles avec l'intersection, on cherche une autre manière de décomposer un idéal. On va montrer que cette notion est liée à ce qu'on appelle les nombres premiers.

17. Montrer que pour deux idéaux I et J de $\mathbb{A}$, alors les deux ensembles suivants sont aussi des idéaux de $\mathbb{A}$:

— $IJ := \left\{c \in \mathbb{A} : \exists k \in \mathbb{N}^*, a_1, \ldots, a_k \in I, b_1, \ldots, b_k \in J \text{ tels que } c = \sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j\right\}$
— $I + J := \{c \in \mathbb{A} : \exists\ i \in I \text{ et } j \in J \text{ tels que } c = i + j\}$.

18. Trouver deux idéaux I et J de $\mathbb{Z}$ indécomposables tels que
$$IJ = 6\mathbb{Z}.$$
On dit qu'on a trouvé une décomposition de l'idéal $6\mathbb{Z}$ en deux idéaux indécomposables.

19. Montrer que pour tout idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une famille finie d'idéaux indécomposables $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ tels que
$$n\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

20. Trouver deux idéaux I et J de $\mathbb{Z}$ indécomposables tels que
$$I + J = \mathbb{Z}.$$

Partie III

21. Soit $P(x) \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X)\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

22. Montrer que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ s'écrivent sous la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$.

23. Caractériser les idéaux de la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$ qui sont indécomposables pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

24. Caractériser les idéaux de la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$ qui sont indécomposables pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

25. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^d$. Montrer que l'ensemble des polynômes qui annulent l'endomorphisme f, c'est-à-dire
$$Annul(f) := \{P(X) \in \mathbb{K}[X] : P(f) \text{ est l'endomorphisme identiquement nul}\},$$
est un idéal dans $\mathbb{K}[X]$.

26. On pose $\Phi_f : \mathbb{K}[X] \to End(\mathbb{K}^d)$ l'application qui a un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(f) \in End(\mathbb{K}^d)$. Montrer que Φ_f est un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ vers $(End(\mathbb{K}^d), +, \circ)$.

27. Montrer que pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ le noyau de $\Phi_f(P)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^d$ stable par l'endomorphisme f.

28. On appelle polynôme minimal d'un endomorphisme f le polynôme de $Annul(f)$ de plus petit degré $p \in \mathbb{N}$, dont le coefficient de plus haut degré $z_p = 1$. Montrer qu'un tel polynôme minimal existe, et qu'il est de plus unique.

29. Soit M_f la matrice représentant un endomorphisme $f \in End(\mathbb{K}^d)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de polynôme minimal $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $p \in \mathbb{N}$. On admet que M_f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal $P(X)$ est scindé à racines simples. Dans ce cas, il existe des polynômes $(P_k(X))_{1 \leq k \leq p}$, non réduits à des constantes et de degré 1, tels que $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} P_k(X)$. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p$, les idéaux $I_k := P_k(X)\mathbb{K}[X]$ sont indécomposables, que pour tout $Q \in I_k$

$$Ker(\Phi_f(P_k)) \subset Ker(\Phi_f(Q))$$

et que

$$Ker(\Phi_f(P_k)) \bigoplus Ker(\Phi_f(P_m))$$

pour tout $1 \leq m \leq p$ avec $m \neq k$.