SESSION 2020

CAPESA
ISE Option mathématiques

PREMIERE COMPOSITION

I - Problème d'analyse

Partie I

1. On note (E_h) l'équation différentielle proposée. L'équation caractéristique (E_c) associée est $z^2+2z+1=0$. Cette équation admet une racine double à savoir $r=-1$. Les solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto (at+b)e^{-t}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Soit f une telle fonction. Pour tout réel t, $f'(t) = ae^{-t} - (at+b)e^{-t} = (-at+a-b)e^{-t}$ et donc

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f'(0)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=1 \\ a-b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=1 \\ a=2 \end{array}\right. .$$

La solution f de (E_h) sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus $f(0)=1$ et $f'(0)=1$ est la fonction $t \mapsto (2t+1)e^{-t}$.

2. On note (E) l'équation proposée. On sait que la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est somme de la solution générale de (E_h) sur $\mathbb{R}$, déterminée à la question précédente, et d'une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f\ :\ t \mapsto at+b$. Pour tout réel t,

$$f''(t)+2f'(t)+f(t) = 0+2a+(at+b) = at+2a+b.$$

Mais alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t)+2f'(t)+f(t) = -t \Leftrightarrow a=-1 \text{ et } 2a+b=0 \Leftrightarrow a=-1 \text{ et } b=2.$$

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $t \mapsto -t+2$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto (at+b)e^{-t} - t + 2$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Soit f une telle fonction. Pour tout réel t, $f'(t) = (-at+a-b)e^{-t} - 1$ et donc

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f'(0)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b+2=1 \\ a-b-1=1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} b=-1 \\ a=1 \end{array}\right. .$$

La solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus $f(0)=1$ et $f'(0)=1$ est la fonction $t \mapsto (t-1)e^{-t} - t + 2$.

3. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} y' = f(t,y) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - ty(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-\frac{t^2}{2}}y'(t) - te^{-\frac{t^2}{2}}y(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left(e^{-\frac{t^2}{2}}y\right)'(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^n / \ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-\frac{t^2}{2}}y(t) = C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^n / \ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}C. \end{aligned}$$

Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Soit y une telle fonction. $y(0) = \alpha \Leftrightarrow C = \alpha$. La solution cherchée est la fonction $t \mapsto e^{\frac{t^2}{2}}\alpha$.

4. Le système proposé s'écrit $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, pour tout $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe une solution X et une seule du sytème sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus $X(0) = X_0$.

5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, en développant suivant la première colonne, on obtient

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda(\lambda-1)+1)-(-1) = -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 \\ &= -(\lambda-1)\left(\lambda^2+1\right) = -(\lambda-1)(\lambda-i)(\lambda+i).\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Sp}(A) = (1, i, -i)$. χ_A est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)\,X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y=0 \\ -y-z=0 \\ -x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = x \text{ et } z = -x.$$

Donc, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(U_1)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in E_i(A) \Leftrightarrow (A - iI_3)\,X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -ix+y=0 \\ -iy-z=0 \\ -x+y+(1-i)z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=ix \\ -i(ix)-z=0 \\ -x+ix+(1-i)z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=ix \\ z=x \end{array}\right.$$

Donc, $E_i(A) = \mathrm{Vect}\,(U_2)$ où $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque A est réelle, un calcul conjugué fournit alors $E_{-i}(A) = \mathrm{Vect}\,(U_3)$ où $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par suite, $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1, i, -i)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (on rappelle que le calcul de P^{-1} est inutile).

Soit maintenant $X\ :\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ de sorte que $X = PY$.

$$\begin{aligned}X' = AX &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow \left(P^{-1}X\right)' = D\left(P^{-1}X\right) \text{ (car } P \text{ est constante quand } t \text{ varie)} \\ &\Leftrightarrow Y' = DY \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_1 \\ y_1' = iy_1 \\ z_1' = -iz_1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x_1(t) = ae^t \\ y_1(t) = be^{it} \\ z_1(t) = ce^{-it} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^t \\ be^{it} \\ ce^{-it} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t + be^{it} + ce^{-it} \\ ae^t + ibe^{it} - ice^{-it} \\ -ae^t + be^{it} + ce^{-it} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Ensuite,

$$X(0)=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c=x_0 \\ a+ib-ic=y_0 \\ -a+b+c=z_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}(x_0-z_0)\ \ (\mathrm{I}-\mathrm{III}) \\ \dfrac{1}{2}(x_0-z_0)+ib-ic=y_0 \\ -\dfrac{1}{2}(x_0-z_0)+b+c=z_0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}(x_0-z_0) \\ ib-ic=\dfrac{1}{2}(-x_0+2y_0+z_0) \\ b+c=\dfrac{1}{2}(x_0+z_0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}(x_0-z_0) \\ b-c=-\dfrac{i}{2}(-x_0+2y_0+z_0) \\ b+c=\dfrac{1}{2}(x_0+z_0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}(x_0-z_0) \\ b=\dfrac{1}{4}((1+i)x_0-2iy_0+(1-i)z_0)\ \ (\mathrm{II}+\mathrm{III}) \\ c=\dfrac{1}{4}((1-i)x_0+2iy_0+(1+i)z_0)\ \ (-\mathrm{II}+\mathrm{III}) \end{array}\right.$$

La solution demandée est la fonction

$$X\ :\ t\mapsto \frac{(x_0-z_0)\,e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\frac{((1+i)x_0-2iy_0+(1-i)z_0)\,e^{it}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{((1-i)x_0+2iy_0+(1+i)z_0)\,e^{-it}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Si $x_0-z_0\neq 0$, une telle fonction est non bornée sur $\mathbb{R}$ et donc non périodique. Si $z_0-x_0=0$, une telle solution est 2π-périodique. Donc, la solution de la question précédente est périodique si et seulement si $z_0=x_0$.

Partie II

7. Puisque f est globalement lipschitzienne, il existe $L\in\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$.
Par suite, $\mathscr{E}=\left\{L\in\mathbb{R}^+/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|\right\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. Mais alors, $\mathscr{E}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ ou encore L_f existe dans $\mathbb{R}$.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $L_n\in\mathscr{E}$ tel que $L_f\leqslant L_n<L_f+\dfrac{1}{n}$. Le théorème des gendarmes montre que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n=L_f$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $L_n\in\mathscr{E}$ et donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|f(x)-f(y)|\leqslant L_n|x-y|$. Pour chaque $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $|f(x)-f(y)|\leqslant L_f|x-y|$. Cette inégalité étant valable pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a montré que f est globalement L_f-lipschitzienne. On note que L_f est alors le minimum de $\mathscr{E}$.

9. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=\left|\sin^3(x)-\sin^3(y)\right|=|\sin(x)-\sin(y)|\times\left|\sin^2(x)+\sin(x)\sin(y)+\sin^2(y)\right|\\&\leqslant|\sin(x)-\sin(y)|\left(\sin^2(x)+|\sin(x)\sin(y)+\sin^2(y)\right)\leqslant 3|\sin(x)-\sin(y)|.\end{aligned}$$

Ensuite, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$|\sin(x)-\sin(y)|\leqslant|x-y|\times\sup_{t\in\mathbb{R}}|\cos(t)|\leqslant|x-y|.$$

Finalement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 3|x-y|.$$

f est 3-lipschitzienne.

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

10. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2=1$ (et donc $x \in [-1,1]$), $G(x,y) = x\left(1-x^2\right)$.
Il s'agit donc de trouver le minimum et le maximum sur $[-1,1]$ de la fonction $g\ :\ x \mapsto x\left(1-x^2\right)$. La fonction g est dérivable sur $[-1,1]$ et pour tout réel x, $g'(x) = -3x^2+1$. La fonction g' est négative sur $\left[-1,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, positive sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},1\right]$. On en déduit que la fonction est décroissante sur $\left[-1,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, croissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},1\right]$.

$g(-1)=g(1)=0$ et d'autre part, $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ puis $g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, la fonction g étant impaire.

Le minimum de g sur $[-1,1]$ est $g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ et le maximum de g sur $[-1,1]$ est $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ puis le maximum de la fonction $|G|$ sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2+y^2=1\right\}$ est $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

11. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\cos(x)\left(\sin(x)\right)^2 = 3G(\cos(x),\sin(x))$ avec $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. Donc, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant 3 \times \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Comme à la question 9), l'inégalité des accroissements finis montre que la fonction f est $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ lipschitzienne. On note que $\dfrac{2}{\sqrt{3}} < 3$ et donc que la constante $L = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ est une meilleure constante de LIPSCHITZ que $L=3$. De plus, par définition d'une borne inférieure, $L_f \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. On va montrer que $L_f = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Soit $x_0 = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$f'\left(x_0\right) = 3\cos\left(x_0\right)\sin^2\left(x_0\right) = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Mais pour tout $x \neq x_0$, $L_f \geqslant \left|\dfrac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right|$. Quand x tend vers x_0, on obtient $L_f \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et finalement, $L_f = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

12. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = \sin^3(y)$. La fonction f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable y sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de CAUCHY

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \sin^3(y) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{array}\right.$$

admet une solution maximale et une seule. Donc, les deux problèmes de l'énoncé admettent une solution.

13. L'unique solution maximale au problème de CAUCHY $\left\{\begin{array}{l} u' = \sin^3(u) \\ u(0) = 0 \end{array}\right.$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ ($u\ :\ t \mapsto 0$) et l'unique solution maximale au problème de CAUCHY $\left\{\begin{array}{l} z' = \sin^3(z) \\ z(0) = \pi \end{array}\right.$ est la fonction $z\ :\ t \mapsto \pi$, constante sur $\mathbb{R}$.

Soit y l'unique solution maximale au problème de CAUCHY $\left\{\begin{array}{l} y' = \sin^3(y) \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$. On admet que la fonction y est définie sur $[0,+\infty[$ au moins (on peut démontrer que y est définie sur $\mathbb{R}$). Par unicité de la solution maximale au problème de CAUCHY en t_0, pour tout $t_0 \geqslant 0$, on a $y\left(t_0\right) \neq u\left(t_0\right) = 0$ et pour tout $t_0 \geqslant 0$, on a $y\left(t_0\right) \neq z\left(t_0\right) = \pi$. La fonction y étant continue sur $[0,+\infty[$ et ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$, la fonction y est de signe constant sur $[0,+\infty[$. Puisque $y(0) > 0$, on en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) > 0$. De même, la fonction $t \mapsto y(t)-\pi$ est de signe constant sur $[0,+\infty[$ et puisque $y(0)-\pi = 1-\pi < 0$, on en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $y(t)-\pi < 0$.

On a montré que pour tout $t \geqslant 0$, $0 < y(t) < \pi$.

14. Pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$y'(t) = y'(t) - z'(t) = \sin^3(y(t)) - \sin^3(z(t)) \leqslant \left|\sin^3(y(t)) - \sin^3(z(t))\right| \leqslant L_f|y(t)-z(t)| = \frac{2}{\sqrt{3}}(\pi - y(t)).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Partie III

15. Soit (x, y) l'unique solution au problème de CAUCHY en (x_0, y_0) donné dans l'énoncé. Si les fonctions x et y ne s'annulent pas sur $[0, +\infty[$, par continuité de ces fonctions sur $[0, +\infty[$, les fonctions x et y gardent un signe constant sur $[0, +\infty[$. Puisque $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$, les fonctions x et y sont strictement positives sur $[0, +\infty[$. Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x(t), y(t)) \in Q$.

Supposons maintenant que l'une des fonctions x ou y s'annule sur $[0, +\infty[$. Supposons par exemple que la fonction y s'annule la première (avant x au sens large). On note $t^* \geqslant 0$ la première valeur de t en laquelle la fonction y s'annule. Pour $t < t^*$, on a donc $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ puis $x(t^*) \geqslant 0$ et $y(t^*) = 0$.

En posant $x'_0 = x(t^*) \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ est solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma y + \delta xy \\ x(t^*) = x'_0 \\ y(t^*) = 0 \end{array}\right.$. La fonction $t \mapsto \left(x'_0 e^{\alpha(t-t^*)}, 0\right)$ est aussi une solution à ce problème de CAUCHY (quand $y = y' = 0$, il reste $x' = \alpha x$). Par unicité, on en déduit que

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ (x(t), y(t)) = \left(x'_0 e^{\alpha(t-t^*)}, 0\right).$$

Dans ce cas aussi, pour tout $t \geqslant 0$, $(x(t), y(t)) \in Q$ (puisque $x'_0 \geqslant 0$).

La démarche est analogue si la fonction x s'annule en premier.

16. Si les fonctions x et y sont constantes sur $[0, +\infty[$, alors les fonctions x' et y' sont nulles sur $[0, +\infty[$. En particulier, $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ ce qui fournit le système $\left\{\begin{array}{l} \alpha x_0 - \beta x_0 y_0 = 0 \\ -\gamma y_0 + \delta x_0 y_0 = 0 \end{array}\right.$, (S).

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0(\alpha - \beta y_0) = 0 \\ y_0(-\gamma + \delta x_0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ -\gamma y_0 = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y_0 = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \dfrac{\alpha}{\beta}(-\gamma + \delta x_0) = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x_0, y_0) = (0, 0) \text{ ou } (x_0, y_0) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Ainsi, il existe au plus deux points stationnaires à savoir $(x^*, y^*) = (0, 0)$ ou $(x^*, y^*) = \left(\dfrac{\gamma}{\delta}, \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

Réciproquement, supposons que (x_0, y_0) soit l'un de ces deux points et notons (x, y) la solution au problème de CAUCHY de l'énoncé. La fonction constante $t \mapsto (x^*, y^*)$ est aussi une solution au même problème de CAUCHY. Par unicité, pour tout réel $t \geqslant 0$, $(x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$. Donc, chacun des deux points est un point stationnaire.

Il existe exactement deux points stationnaires à savoir $(x^*, y^*) = (0, 0)$ ou $(x^*, y^*) = \left(\dfrac{\gamma}{\delta}, \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

17. La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, la fonction F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$.

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\beta x_0 \\ -\gamma + \delta x_0 \end{pmatrix}$. Donc,

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,\ dF_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} -\beta x_0 \\ -\gamma + \delta x_0 \end{pmatrix} dy.$$

18. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de F en (x_0, y_0) est $J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y_0 & -\beta x_0 \\ \delta y_0 & -\gamma + \delta x_0 \end{pmatrix}$.

1er cas. $J_F(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$. Le spectre de cette matrice est $(\alpha, -\gamma)$.

2ème cas. $J_F\left(\dfrac{\gamma}{\delta}, \dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\beta\gamma}{\delta} \\ \dfrac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 + \alpha\gamma$ et donc le spectre de cette matrice est $\left(i\sqrt{\alpha\gamma}, -i\sqrt{\alpha\gamma}\right)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

19. Si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, la question 15) montre que les fonctions x et y sont strictement positives sur $[0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto V(t) = (x(t), y(t))$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
V'(t) &= \delta x'(t) - \gamma \frac{x'(t)}{x(t)} + \beta y'(t) - \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} \\
&= \delta(\alpha x(t) - \beta x(t)y(t)) - \gamma \frac{\alpha x(t) - \beta x(t)y(t)}{x(t)} + \beta(-\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)) - \alpha \frac{-\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)}{y(t)} \\
&= \delta(\alpha x(t) - \beta x(t)y(t)) - \gamma(\alpha - \beta y(t)) + \beta(-\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)) - \alpha(-\gamma + \delta x(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La fonction V est donc constante sur $[0, +\infty[$ puis pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\delta x(t) - \gamma \ln(x(t)) + \beta y(t) - \alpha \ln(y(t)) = V(t) = V(0) = \delta x_0 - \gamma \ln(x_0) + \beta y_0 - \alpha \ln(y_0).$$

On a obtenu une équation de la courbe intégrale.

20. La fonction $V^* : (x, y) \mapsto V(x, y) - V(x_0, y_0)$ est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{Q}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La dérivée partielle de la fonction V^* par rapport à sa deuxième variable en (x_0, y_0) est

$$\frac{\partial V^*}{\partial y}(x_0, y_0) = \beta - \frac{\alpha}{y_0} = \frac{\beta y_0 - \alpha}{y_0} \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert U contenant x_0 et un ouvert $\mathcal{O}$ contenu dans $\overset{\circ}{Q}$ tel que (x_0, y_0) tel que,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ ((a, b) \in \mathcal{O} \text{ et } V^*(a, b) = 0) \Leftrightarrow (a \in U \text{ et } b = \phi(a)),$$

ou encore

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ ((a, b) \in \mathcal{O} \text{ et } V(a, b) = V(x_0, y_0)) \Leftrightarrow (a \in U \text{ et } b = \phi(a)).$$

De plus, ϕ est de classe C^1 sur U.

21. Pour tout x de U, on a $\delta x - \gamma \ln(x) + \beta\phi(x) - \alpha \ln(\phi(x)) = \delta x_0 - \gamma \ln(x_0) + \beta\phi(x_0) - \alpha \ln(\phi(x_0))$. En dérivant cette égalité, on obtient,

$$\forall x \in U,\ \delta - \frac{\gamma}{x} + \phi'(x)\left(\beta - \frac{\alpha}{\phi(x)}\right) = 0.$$

Par suite,

$$\phi'(x_0) = -\frac{\delta - \dfrac{\gamma}{x_0}}{\beta - \dfrac{\alpha}{y_0}} = \frac{y_0}{x_0} \times \frac{-\delta x_0 + \gamma}{\beta y_0 - \alpha}.$$

La différentielle de la fonction ϕ en (x_0, y_0) est alors $d\phi_{(x_0, y_0)} = \phi'(x_0)\, dx = \dfrac{y_0}{x_0} \times \dfrac{-\delta x_0 + \gamma}{\beta y_0 - \alpha} dx$.

II - Problème d'algèbre

Partie I

1. Montrons que $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$.

- $0 = 0 + 0i \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$ et $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$.
- Soit $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$.

$$\left(a + ib\sqrt{5}\right) - \left(a' + i\sqrt{5}b'\right) = (a - a') + i(b - b')\sqrt{5} \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$$

car $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b - b' \in \mathbb{Z}$ et

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$$\left(a+ib\sqrt{5}\right)\times\left(a'+i\sqrt{5}b'\right)=(aa'-5bb')+i(ab'+ba')\sqrt{5}\in\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$$

car $aa'-5bb'\in\mathbb{Z}$ et $ab'+ba'\in\mathbb{Z}$. Enfin, $1=1+0\times i\sqrt{5}\in\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$.

On a montré que $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C},+,\times)$ et donc $\left(\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right],+,\times\right)$ est un anneau.

2. L'application ϕ est bien définie car pour tout $((a,b),(a',b'))\in\mathbb{Z}^2$, $a+ib\sqrt{5}=a'+ib'\sqrt{5}\Leftrightarrow(a,b)=(a',b')$ et donc l'image d'un élément de $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$ est uniquement définie.

Pour $((a,b),(a',b'))\in\mathbb{Z}^2$, posons $(a,b)\oplus(a'+b')=(a+a',b+b')$ et $(a,b)\otimes(a',b')=(aa'-5bb',ab'+ba')$. Vérifions que $\left(\mathbb{Z}^2,\oplus,\otimes\right)$ est effectivement un anneau (commutatif).

• $\oplus$ est l'addition usuelle sur $\mathbb{Z}^2$ et donc $\left(\mathbb{Z}^2,\oplus\right)$ est un groupe commutatif.

• Pour tout $((a,b),(a',b'))\in\left(\mathbb{Z}^2\right)^2$, $(aa'-5bb',ab'+ba')\in\mathbb{Z}^{\not{2}}$ et donc $\otimes$ est bien une loi interne sur $\mathbb{Z}^2$. De plus, $\otimes$ est clairement commutative.
Soit $((a,b),(a',b'),(a'',b''))\in\left(\mathbb{Z}^2\right)^3$.

$$\begin{aligned}((a,b)\otimes(a',b'))\otimes(a'',b'')=(aa'-5bb',ab'+ba')\otimes(a'',b'')=&\\ ((' aa'-5bb')a''-5(ab'+ba')b'',(aa'-5bb')b''+(ab'+ba')a'')&\\ =(aa'a''-5bb'a''-5ba'b''-5ab'b',aa'b''ba'a''+ab'a''-5bb'b'').&\end{aligned}$$

Par commutativité de $\otimes$ et symétrie de l'expression obtenue, on a aussi $(a,b)\otimes((a',b')\otimes(a'',b''))=(aa'a''-5bb'a''-5ba'b''-5ab'b',aa'b''ba'a''+ab'a''-5bb'b'')$ et finalement, $((a,b)\otimes(a',b'))\otimes(a'',b'')=(a,b)\otimes((a',b')\otimes(a'',b''))$. La loi $\otimes$ est associative.

Soit $((a,b),(a',b'),(a'',b''))\in\left(\mathbb{Z}^2\right)^3$.

$$\begin{aligned}((a,b)\oplus(a',b'))\otimes(a'',b'')&=(a+a',b+b')\otimes(a'',b'')\\&=((a+a')a''-5(b+b')b'',(a+a')b''+(b+b')a'')\\&=(aa''-5b'',ab''+ba'')+(a'a''-5b'b'',a'b''+b'a'')\\&=(a,b)\otimes(a'',b'')\oplus(a',b')\otimes(a'',b'').\end{aligned}$$

La loi $\otimes$ est donc distributive sur la loi $\oplus$. Finalement, $\left(\mathbb{Z}^2,\oplus,\otimes\right)$ est un anneau commutatif (et unitaire car $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, $(a,b)\otimes(1,0)=(a,b)$ et donc $(1,0)$ est élément neutre pour $\otimes$)).
Soit $((a,b),(a',b'))\in\mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned}\phi\left(\left(a+ib\sqrt{5}\right)+\left(a'+ib'\sqrt{5}\right)\right)&=\phi\left((a+a')+i(b+b')\sqrt{5}\right)=(a+a',b+b')\\&=(a,b)\oplus(a',b')=\phi\left(a+ib\sqrt{5}\right)\oplus\phi\left(a'+ib'\sqrt{5}\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi\left(\left(a+ib\sqrt{5}\right)\times\left(a'+ib'\sqrt{5}\right)\right)&=\phi\left((aa'-5bb')+i(ab'+ba')\sqrt{5}\right)=(aa'-5bb',ab'+ba')\\&=(a,b)\otimes(a',b')=\Phi\left(a+ib\sqrt{5}\right)\otimes\phi\left(a'+ib'\sqrt{5}\right).\end{aligned}$$

Enfin, $\Phi(1)=\Phi\left(1+0i\sqrt{5}\right)=(1,0)$. On a montré que ϕ est un morphisme d'anneaux.

3. Pour $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, il existe un et un seul $x\in\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$ tel que $\phi(x)=(a,b)$, à savoir $x=a+ib\sqrt{5}$. Donc, l'application ϕ est bijective puis ϕ est un isomorphisme d'anneaux.

4. $2\in\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$. Puisque ϕ est un isomorphisme d'anneaux, 2 est inversible pour $\times$ dans $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$ si et seulement si $(2,0)$ est inversible pour $\otimes$ dans $\mathbb{Z}^2$. Ceci équivaut à l'existence de $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$(2,0)\otimes(a,b)=(1,0)$ ou encore $(2a,2b)=(1,0)$. L'équation $2a=1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$ et donc 2 n'est pas inversible pour $\times$ dans $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$. Ceci montre que l'anneau $\left(\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right],+,\times\right)$ n'est pas un corps.

5.

$$\begin{aligned}x\times y&=(aa'-5bb')+i(ab'+ba')\sqrt{5}=\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'+ib'\sqrt{5}\\-5b'+ia'\sqrt{5}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i\sqrt{5}\\i\sqrt{5}&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}\\&=\phi(x)\,M\,\phi(y)^T,\end{aligned}$$

où $M=\begin{pmatrix}1&i\sqrt{5}\\i\sqrt{5}&-5\end{pmatrix}$.

6. On a donc pour tout $((x_1,x_2),(y_1,y_2))\in\left(\mathbb{K}^2\right)^2$,

$$\Psi\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right)=x_1y_1+i\sqrt{5}\left(x_1y_2+x_2y_1\right)-5x_2y_2.$$

On note que Ψ est symétrique et donc, pour montrer que Ψ est bilinéaire, il suffit de vérifier la linéarité par rapport à la première variable. Soient $(x,x',y)\in\left(\mathbb{K}^2\right)^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. En posant $x=(x_1,x_2)$, $x'=(x_1',x_2')$ et $y=(y_1,y_2)$,

$$\begin{aligned}\Psi\left(\lambda x+\mu x',y\right)&=\left(\lambda x_1+\mu x_1'\right)y_1+i\sqrt{5}\left(\left(\lambda x_1+\mu x_1'\right)y_2+\left(\lambda x_2+\mu x_2'\right)y_1\right)-5\left(\lambda x_2+\mu x_2'\right)y_2\\&=\lambda\left(x_1y_1+i\sqrt{5}\left(x_1y_2+x_2y_1\right)-5x_2y_2\right)+\mu\left(x_1'y_1+i\sqrt{5}\left(x_1'y_2+x_2'y_1\right)-5x_2'y_2\right)\\&=\lambda\Psi(x,y)+\mu\Psi(x',y).\end{aligned}$$

Ψ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}^2$.

7. Pour tout $x\in\mathbb{K}^2$, posons $q(x)=\Psi(x,x)$ ou encore, pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbb{K}^2$, posons

$$q\left(x_1,x_2\right)=x_1^2+2i\sqrt{5}x_1x_2-5x_2^2.$$

Pour tous $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{K}^2$ et $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y))&=\frac{1}{4}((\Psi(x,x)+2\Psi(x,y)+\Psi(y,y))-(\Psi(x,x)-2\Psi(x,y)+\Psi(y,y)))\\&=\Psi(x,y).\end{aligned}$$

8. Pour $((a,b),(a',b'))\in\left(\mathbb{Z}^2\right)^2$, posons $x=a+ib\sqrt{5}$ et $y=a'+ib'\sqrt{5}$ puis $\overline{\Psi}((a,b),(a',b'))=x\times y$. Alors, pour tout $(x,y)\in\left(\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]\right)^2$,

$$\begin{aligned}4\overline{\Psi}(\phi(x),\phi(y))&=(2x)\times(2y)=4\left(aa'-i\sqrt{5}\left(ab'+ba'\right)-5bb'\right)\\&=\begin{pmatrix}2a&2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i\sqrt{5}\\i\sqrt{5}&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a'\\2b'\end{pmatrix}\\&=\phi(2x)\,M\,\phi(2y)^T.\end{aligned}$$

Avec les mêmes notations, posons $\overline{q}(a,b)=\overline{q}(\phi(x))=a^2+2i\sqrt{5}ab-5b^2$. Alors, pour tout $(x,y)\in\left(\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]\right)^2$, $\overline{q}(\phi(x+y))-\overline{q}(\phi(x-y))=4\overline{\Psi}(\phi(2x),\phi(2y))$.

Partie II

10. Soit $n\in\mathbb{Z}$. $0=n\times 0\in n\mathbb{Z}$. Ensuite, pour tout $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, $na-nb=n(a-b)\in n\mathbb{Z}$. Donc, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$. Enfin, pour tout $(a,m)\in\mathbb{Z}^2$, $m\times(na)=n\times(ma)\in n\mathbb{Z}$. Donc, I est un idéal de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$.

11. Soient I et J deux idéaux de l'anneau $\mathbb{A}$. $0\in I$ et $0\in J$. Donc, $0\in I\cap J$.

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

Ensuite, pour tout $(x, y) \in I \cap J$, $x - y \in I$ et $x - y \in J$ et donc $x - y \in I \cap J$. Donc, $I \cap J$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{A}, +)$.
Enfin, pour tout $a \in \mathbb{A}$ et tout $x \in I \cap J$, $ax \in I$ et $ax \in J$ et donc $ax \in I \cap J$. De même, pour tout $a \in \mathbb{A}$ et tout $x \in I \cap J$, $xa \in I \cap J$. Donc, $I \cap J$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$.

12. Soit p un nombre premier. $1 \notin p\mathbb{Z}$ et donc $p\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$. $p \in p\mathbb{Z}$ et donc $p\mathbb{Z} \neq \{0\}$.
Soient alors $(a, b) \in (p\mathbb{Z})^2$. Supposons que $ab \in p\mathbb{Z}$. Si p divise a, alors $a \in p\mathbb{Z}$. Sinon, $p \wedge a = 1$ et p divise ab. D'après le théorème de Gauss, p divise b ou encore $b \in p\mathbb{Z}$.
On a montré que $\forall (a, b) \in (p\mathbb{Z})^2$, $(ab \in p\mathbb{Z} \Rightarrow (a \in p\mathbb{Z} \text{ ou } b \in p\mathbb{Z}))$. L'idéal $p\mathbb{Z}$ est donc indécomposable.

13. $2 \times 3 = 6 \in 6\mathbb{Z}$ mais $2 \notin 6\mathbb{Z}$ et $3 \notin 6\mathbb{Z}$. Donc, l'idéal $6\mathbb{Z}$ est décomposable.

14. Soit $I = 2\mathbb{Z}$ et $J = 3\mathbb{Z}$. D'après les questions 10) et 12), I et J sont des idéaux indécomposables de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$. De plus, on sait que $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = (2 \vee 3)\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ (les multiples communs à deux entiers sont les multiples de leur PPCM).

15. Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, n se décompose en produit de nombres premiers sous la forme $n = \varepsilon\, p_1 \dots p_k$ où les nombres p_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des nombres premiers (pas nécessairement deux à deux distincts) et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, n est un multiple de p_j puis tout multiple de n est un multiple de p_j ou encore $n\mathbb{Z} \subset p_j\mathbb{Z}$. Mais alors, $n\mathbb{Z} \subset \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$. De plus, puisque les p_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des nombres premiers, les $p_j\mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, vérifient la propriété (P) d'après la question 12).

16. Prenons $n = 4 = 2^2$. D'après ce qui précède, $4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. Mais inversement, 2 est un multiple de 2 ou encore un élément de $2\mathbb{Z}$, qui n'est pas un multiple de 4 ou encore qui n'est pas dans $4\mathbb{Z}$. Donc, $2\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} \underset{\neq}{\subset} 4\mathbb{Z}$.

17. Montrons que IJ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$.
$0 \in I$ et $0 \in J$ et donc $0 = 0 \times 0 \in IJ$.
De plus, pour tout $(k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis tout $((a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k), (c_1, \dots, c_{k'}), (d_1, \dots, d_{k'})) \in I^k \times J^k \times I^{k'} \times J^{k'}$,

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j - \sum_{j=1}^{k'} c_j \times d_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j + \sum_{j=1}^{k'} (-c_j) \times d_j \in IJ.$$

Donc, IJ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{A}, +)$. Ensuite, pour tout $c = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j b_j \in IJ$ et tout $x \in \mathbb{A}$, $cx = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j \times (b_j x) \in IJ$ car pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $b_j x \in J$ et de même, $xc = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (x a_j)\, b_j \in IJ$ car pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $x a_j \in I$.

On a montré que IJ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$.

Montrons que $I + J$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$.
$0 \in I$ et $0 \in J$ et donc $0 = 0 + 0 \in I + J$.
De plus, pour tout $(k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis tout $((a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k), (c_1, \dots, c_{k'}), (d_1, \dots, d_{k'})) \in I^k \times J^k \times I^{k'} \times J^{k'}$,

$$\sum_{j=1}^{k} (a_j + b_j) - \sum_{j=1}^{k'} (c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{k} (a_j + b_j) + \sum_{j=1}^{k'} (-c_j - d_j) \in I + J.$$

Donc, $I + J$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{A}, +)$. Ensuite, pour tout $c = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (a_j + b_j) \in I + J$ et tout $x \in \mathbb{A}$, $cx = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (a_j x + b_j x) \in I + J$ car pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $a_j x \in I$ et $b_j x \in J$. De même, $xc = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (x a_j + x b_j) \in I + J$ car pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $x a_j \in I$ et $x b_j \in J$.

On a montré que $I + J$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$.

18. Posons $I = 2\mathbb{Z}$ et $J = 3\mathbb{Z}$. Les éléments de IJ sont les nombres de la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} (2q_j)\left(3q'_j\right) = 6 \sum_{j=1}^{k} q_j q'_j$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et les q_j et q'_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des entiers relatifs. Ceci montre que $IJ \subset 6\mathbb{Z}$. Inversement, Si $n \in 6\mathbb{Z}$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$n = 6q$. Mais alors, $n = (2 \times 1)(3q) \in IJ$. Ceci montre que $6\mathbb{Z} \subset IJ$.

Finalement, $IJ = 6\mathbb{Z}$. De plus, les idéaux I et J sont indécomposables d'après la question 12).

19. Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. On pose $n = \varepsilon\, p_1 \dots p_k$ où les p_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des nombres premiers (pas nécessairement deux à deux distincts) et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Soit $m = nq$, $q \in \mathbb{Z}$. $p_1 \times \dots \times p_k = (p_1 \times 1) \dots (p_k \times 1) \in \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ et donc, puisque m est un multiple de $p_1 \dots p_k$ et que $\prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ est un idéal, $m \in \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$. Ceci montre que $n\mathbb{Z} \subset \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$.

Inversement, les éléments de $\prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ s'écrivent $\sum_{j=1}^{k} (p_1 q_{1,j}) \dots (p_k q_{k,j}) = n \sum_{j=1}^{k} q_{1,j} \dots q_{k,j}$ où les $q_{i,j}$ sont des entiers relatifs. Donc, tout élément de $\prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ est un multiple de n puis $\prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$.

Ainsi, $n\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ où les $p_j\mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des idéaux indécomposables.

20. Soient $I = 2\mathbb{Z}$ et $J = 3\mathbb{Z}$. $I+J$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ d'après la question 17). Ensuite, $1 = 2\times(-1)+3\times 1 \in I+J$. Mais alors, l'idéal $I + J$ contient l'ensemble des multiples de 1 à savoir $\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ puis $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. De plus, les idéaux $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ sont indécomposables.

Partie III

21. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ puis $I = P\mathbb{K}[X]$.

$0 = P \times 0 \in I$. Ensuite, pour tout $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $PQ_1 - PQ_2 = P\,(Q_1 - Q_2) \in P\mathbb{R}[X] = I$. Donc, I est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}[X], +)$.
Enfin, pour tout $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $(PQ)R = P(QR) \in P\mathbb{R}[X]$. Finalement, I est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

22. Soit I un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Si $I = \{0\}$, alors $I = 0\mathbb{K}[X]$. Dorénavant, $I \neq \{0\}$.

Soit $\mathscr{E} = \{\deg(Q),\ Q \in I \setminus \{0\}\}$. Puisque $I \neq \{0\}$, $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. $\mathscr{E}$ admet donc un plus petit élément que l'on note d. Soit alors P un élément de $I \setminus \{0\}$, de degré d. Vérifions que $I = P\mathbb{K}[X]$.

Puisque $P \in I$, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ \in I$ et donc $P\mathbb{K}[X] \subset I$.
Inversement, soit $A \in I$. La division euclidienne de A par le polynôme non nul P s'écrit $A = PQ + R$ où $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\deg(R) < \deg(P) = d$. A est dans I et PQ est dans I d'après ce qui précède. Donc, $R = A - PQ$ est dans I. Mais de plus, $\deg(R) < d$. Par définition de d, $R = 0$ puis $A = PQ \in P\mathbb{K}[X]$.

Finalement $I = P\mathbb{K}[X]$. On a montré que pour tout idéal I de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, il existe un polynôme P tel que $I = P\mathbb{K}[X]$ (on dit alors que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal).

23. Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1, irréductible sur $\mathbb{R}$. On sait que P est soit un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 exactement, soit un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 exactement et à discriminant strictement négatif.

Soit $I = P\mathbb{R}[X]$. Vérifions que l'idéal I est indécomposable. Tout d'abord, le polynôme 1 n'est pas un multiple de P et donc $I \neq \mathbb{R}[X]$ et d'autre part, le polynôme $P \neq 0$ est élément de I et donc $I \neq \{0\}$.

Soit alors $(A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $A \times B \in P\mathbb{R}[X]$. Donc, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $AB = PQ$. Si P divise A alors $A \in P\mathbb{R}[X]$. Sinon, puisque P est irréductible sur $\mathbb{R}$, si P ne divise pas A, alors P est premier à A. Ainsi, P divise $PQ = AB$ et P est premier à A. D'après le théorème de Gauss, P divise B ou encore $B \in \mathbb{K}[X]$.

Soit maintenant P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1, non irréductible sur $\mathbb{R}$ (P est donc de degré au moins 2). Il existe deux polynômes A et B tels que $P = AB$ et $1 \leqslant \deg(A) < \deg(P)$ et $1 \leqslant \deg(B) < \deg(P)$. Cette condition sur les degrés montre en particulier que ni A, ni B, ne divisent P ou encore $A \notin P\mathbb{R}[X]$ et $B \notin P\mathbb{R}[X]$. Ceci montre que $P\mathbb{R}[X]$ est décomposable.

Analysons enfin le cas où $\deg(P) \leqslant 0$. Si $P = 0$, alors $P\mathbb{R}[X] = \{0\}$ et si P est une constante non nulle λ, alors $P\mathbb{R}[X] = \lambda\mathbb{R}[X] = \mathbb{K}[X]$. Dans cas, $P\mathbb{R}[X]$ n'est pas indécomposable.

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

En résumé, les idéaux indécomposables de l'anneau $(\mathbb{R}[X],+,\times)$ sont les idéaux de la forme $P\mathbb{R}[X]$ où P est ou bien un polynôme de degré 1, ou bien un polynôme de degré 2 à discriminant strictement négatif.

24. Les éléments de $\mathbb{C}[X]$ irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes de degré 1 exactement (une variante du théorème de d'Alembert-Gauss). Par le même travail qu'à la question précédente, les idéaux indécomposables de l'anneau $(\mathbb{C}[X],+,\times)$ sont les idéaux de la forme $P\mathbb{R}[X]$ où P est un polynôme de degré 1.

25. Soit $f\in\mathscr{L}\left(\mathbb{K}^d\right)$. Montrons que $\mathrm{Annul}(f)$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$.

Le polynôme $P=0$ est dans $\mathrm{Annul}(f)$. Soit $(P,Q)\in(\mathrm{Annul}(f))^2$. $(P-Q)(f)=P(f)-Q(f)=0$ et donc $P-Q\in\mathrm{Annul}(f)$. Ceci montre que $\mathrm{Annul}(f)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{K}[X],+)$.
Soient $P\in\mathrm{Annul}(f)$ et $Q\in\mathbb{K}[X]$. $(P\times Q)(f)=P(f)\circ Q(f)=0\circ Q(f)=0$ et donc $P\times Q\in\mathrm{Annul}(f)$. Ceci montre que $\mathrm{Annul}(f)$ est un idéal de l'anneau commutatif $(\mathbb{K}[X],+)$.

26. Soient $(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2$. $\Phi_f(P+Q)=(P+Q)(f)=P(f)+Q(f)=\Phi_f(P)+\Phi_f(Q)$ et $\Phi_f(P\times Q)=(P\times Q)(f)=P(f)\circ Q(f)=\Phi_f(P)\circ\Phi_f(Q)$. Enfin, $\Phi_f(1)=\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^d}$. Donc, Φ_f est un morphisme d'anneaux, de l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ vers l'anneau $\left(\mathrm{End}\left(\mathbb{K}^d\right),+,\circ\right)$.

27. Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. $\Phi_f(P)=P(f)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^d$ et donc $\mathrm{Ker}\left(\Phi_f(P)\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^d$. De plus, pour tout $x\in\mathrm{Ker}\left(\Phi_f(P)\right)$, puisque f commute avec tout polynôme en f,

$$P(f)(f(x))=(P(f)\circ f)(x)=(f\circ P(f))(x)=f(P(f)(x))=f(0)=0$$

et donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(P(f))$. On a montré que $\mathrm{Ker}(P(f))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^d$ stable par f.

28. Soit $f\in\mathrm{End}\left(\mathbb{K}^d\right)$. $\mathrm{Annul}(f)$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ d'après la question 25). Vérifions d'abord que cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$. $\mathrm{End}\left(\mathbb{K}^d\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à d^2. Donc, la famille d'endomorphismes $\left(f^k\right)_{0\leqslant k\leqslant d^2}$ qui est de cardinal $d^2+1>d^2$ est liée. Par suite, il existe $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant d^2}$ une famille de nombres non tous nuls telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{d^2}a_kf^k=0$. Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d^2}a_kX^k$ est alors un élément non nul de $\mathrm{Annul}(f)$.

Puisque $\mathrm{Annul}(f)$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de $(\mathbb{K}[X],+,\times)$, d'après la question 22), il existe un polynôme P, nécessairement non nul, tel que $\mathrm{Annul}(f)=P\mathbb{K}[X]$.

Soient $p\in\mathbb{N}$ le degré de P puis $P_0=\dfrac{P}{\mathrm{dom}(P)}$. P_0 est un polynôme unitaire de degré p. Vérifions que $\mathrm{Annul}(f)=P_0\mathbb{K}[X]$. Soit $A\in P\mathbb{K}[X]$. Il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $A=PQ$. Mais alors, $A=P_0\times\mathrm{dom}(P)Q\in P_0\mathbb{K}[X]$. Inversement, soit $A\in P_0\mathbb{K}[X]$. Il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $A=P_0Q$. Mais alors, $A=P\times\dfrac{1}{\mathrm{dom}(P)}Q\in P\mathbb{K}[X]$. Ceci montre que $\mathrm{Annul}(f)=P_0\mathbb{K}[X]$ où P_0 est un certain polynôme unitaire. De plus, un multiple non nul de P_0 a un degré supérieur ou égal au degré de P_0 et donc, P_0 est un polynôme unitaire annulateur de f de plus bas degré (dans l'ensemble des polynômes non nuls et annulateurs de f). Ceci montre l'existence du polynôme minimal.

Soient maintenant P_0 et P_1 deux polynômes unitaires tels que $\mathrm{Annul}(f)=P_0\mathbb{K}[X]=P_1\mathbb{K}[X]$. $P_0\in P_0\mathbb{K}[X]=P_1\mathbb{K}[X]$ et donc P_1 divise P_0. De même, $P_1\in P_1\mathbb{K}[X]=P_0\mathbb{K}[X]$ et donc P_0 divise P_1.
Puisque P_0 divise P_1 et P_1 divise P_0, on en déduit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $P_1=\lambda P_0$. Enfin, $1=\mathrm{dom}\left(P_1\right)=\lambda\mathrm{dom}\left(P_0\right)=\lambda$ et donc $P_1=P_0$. Ceci montre l'unicité du polynôme minimal.

29. On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que les P_k sont des polynômes de degré 1.

D'après les questions 23) et 24), pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, $I_k=P_k\mathbb{K}[X]$ est un idéal indécomposable de l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$.

Soit $Q\in I_k$. Il existe $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $Q=P_kP$. Soit $x\in\mathbb{K}^d$.

$$\begin{aligned}x\in\mathrm{Ker}\left(\Phi_f\left(P_k\right)\right)&\Rightarrow\left(P_k(f)\right)(x)=0\Rightarrow P(f)\left(\left(P_k(f)\right)(x)\right)=0\Rightarrow\left(P(f)\circ P_k(f)\right)(x)=0\\&\Rightarrow\left(\left(\left(P\times P_k\right)(f)\right)(x)=0\Rightarrow(Q(f))(x)=0\Rightarrow x\in\mathrm{Ker}\left(\Phi_f(Q)\right).\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}\left(\Phi_f\left(P_k\right)\right)\subset\mathrm{Ker}\left(\Phi_f(Q)\right)$.

Soit $m\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}$. Vérifions que la somme $\mathrm{Ker}\left(\Phi_f\left(P_k\right)\right)+\mathrm{Ker}\left(\Phi_f(Q)\right)$ est directe. Pour cela vérifions que $\mathrm{Ker}\left(\Phi_f\left(P_k\right)\right)\cap\mathrm{Ker}\left(\Phi_f(Q)\right)=\{0\}$.
Les polynômes P_k et P_m sont premiers entre eux (par hypothèse les P_i sont de degré 1 et deux à deux sans racine commune dans $\mathbb{C}$). D'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $UP_k+VP_m=1$. En évaluant en f, on obtient $U(f)\circ P_k(f)+V(f)\circ P_m(f)=\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^d}$ et finalement,

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.

$$\forall x \in \mathbb{K}^d,\ U(f)\left((P_k(f))\right)(x) + V(f)\left((P_m(f))\right)(x) = x.$$

Si de plus, $x \in \mathrm{Ker}\left(\Phi_f\left(P_k\right)\right) \cap \mathrm{Ker}\left(\Phi_f(Q)\right)$, l'égalité précédente fournit $x = 0 + 0 = 0$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}\left(\Phi_f\left(P_k\right)\right) \cap \mathrm{Ker}\left(\Phi_f(Q)\right) = \{0\}$ et finalement, la somme $\mathrm{Ker}\left(\Phi_f\left(P_k\right)\right) + \mathrm{Ker}\left(\Phi_f(Q)\right)$ est directe.

 © Jean-Louis Rouget, 2022. Tous droits réservés.