ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *C* l'ensemble des nombres complexes.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur $R-\{2\}$ par : $f\ (x)=\dfrac{x^3-x^2}{(x-2)^2}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

2. Déterminer les constantes *a, b*, *c* et *d* telles que : $f\ (x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{d}{(x-2)^2}$

3. Calculer $I=\int_0^1 f\ (x)\ dx$

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par :

$$f_n(x)=Ln\ ((1+x^2)^n)$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe (on étudiera également la convexité de cette fonction).

2. Calculer $I_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

3. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ pour $n > 1$.

4. Etudier la suite réelle (x_n) définie par la relation de récurrence: $x_{n+1} = Ln(1 + x_n^2)$ et $x_0 > 0$

Exercice n° 3

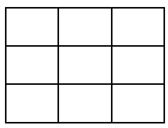
1. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|z+1| = 1$

2. Pour $z \in C$, résoudre l'équation : $|2z+1| = 1$

3. Soit $z_n \in C$, vérifiant l'équation : $|\alpha_n z_n + 1| = 1$, où (α_n) est une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. Déterminer $\lim_{n \to \infty} z_n$.

Exercice n° 4

On dispose d'un casier carré formé de trois lignes et de trois colonnes (donc de neuf cases), comme le montre le dessin suivant :



Dans ce jeu, on dispose de trois balles qui seront lancées une par une dans le casier. On suppose que chaque balle tombe toujours dans une case. On gagne si les trois balles sont alignées sur une même ligne, colonne ou diagonale.

1. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans la case au centre du carré ?

2. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au coin du carré ?

3. Quelle est la probabilité de gagner si la première balle tombe dans une case au milieu d'un côté du carré ?

4. Quelle est la probabilité de gagner ?

Exercice n° 5

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

1. Démontrer que f n'a pas de limite quand x tend vers zéro.

2. Soit la fonction g définie sur R par : $g(x) = \begin{cases} x\,f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur R.

3. On considère la fonction h définie sur R par : $h(x) = g(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{f(x)}\right)$ si $x \neq 0$ et $\dfrac{1}{x} \notin Z$ (ensemble des entiers relatifs) et $h(x) = 0$ dans les autres cas.

Etudier la continuité de h sur R.

4. La fonction h est-elle dérivable en zéro ?

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2\, e^{-x}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 3/2$

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq 3/2$ pour tout n. On donne $e^{-1} \approx 0.368$ et $e^{-3/2} \approx 0.223$.

2. Montrer que $\left|f'(x)\right| \leq 1/2$ pour tout $x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.

3. Montrer que f admet un point fixe que l'on notera x_0.

4. Etudier la convergence de la suite (u_n).