SESSION 2020

CAPESA
Analystes statisticiens

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. De plus, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$,

$$f'(x) = \left(3x^2 - 2x\right) \times \frac{1}{(x-2)^2} + \left(x^3 - x^2\right) \times \frac{-2}{(x-2)^3} = \frac{\left(3x^2-2x\right)(x-2) - 2\left(x^3-x^2\right)}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 4x}{(x-2)^3} = \frac{x\left(x^2-6x+4\right)}{(x-2)^3} = \frac{x\left(x - \left(3-\sqrt{5}\right)\right)\left(x - \left(3+\sqrt{5}\right)\right)}{(x-2)^3}$$

Le signe de la fonction f' est fourni par le tableau suivant :

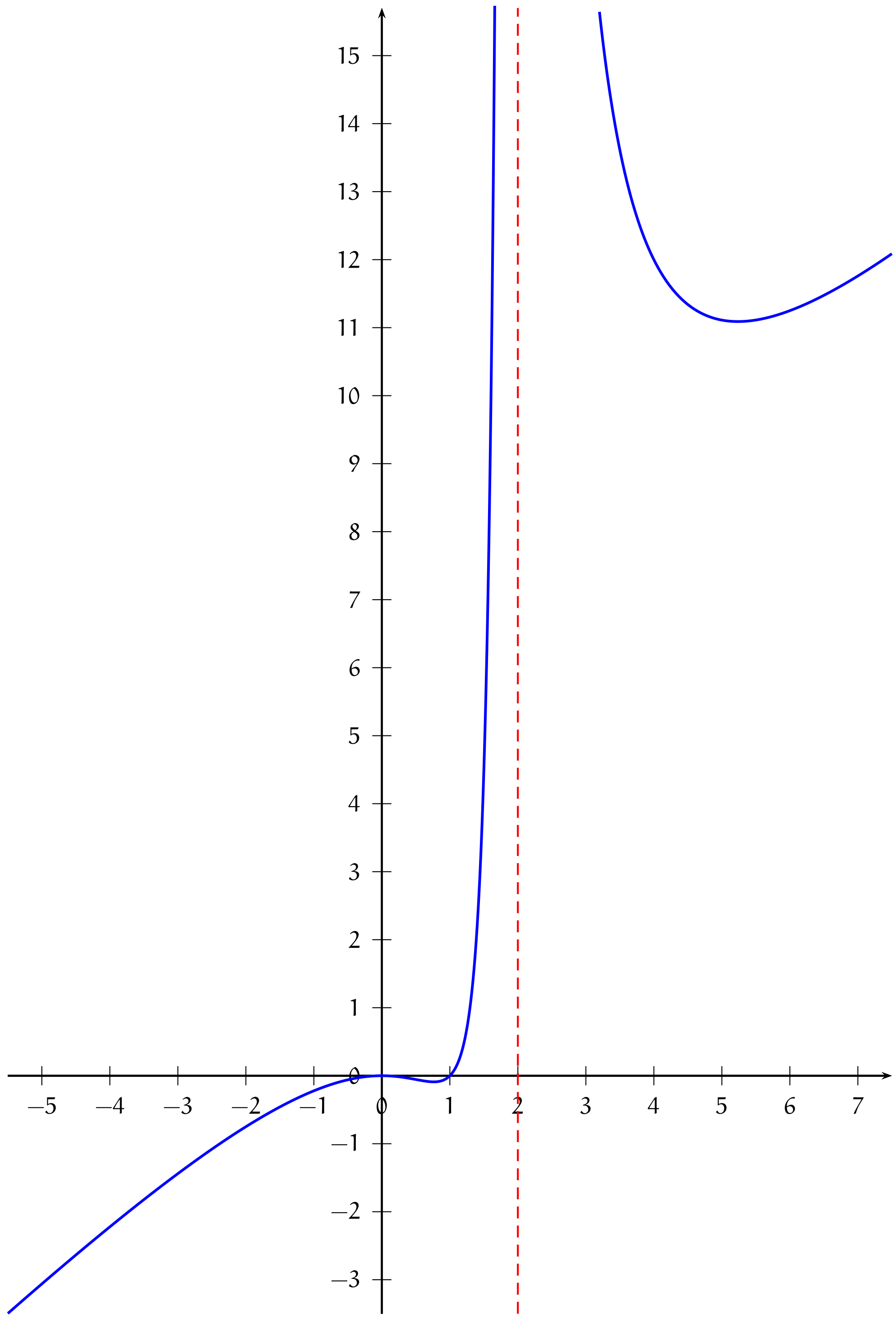
x	$-\infty$		0		$3-\sqrt{5}$		2		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-6x+4		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, sur $\left[3-\sqrt{5}, 2\right[$ et sur $\left[3+\sqrt{5}, +\infty\right[$ et la fonction f est strictement décroissante sur $\left[0, 3-\sqrt{5}\right]$ et sur $\left]2, 3+\sqrt{5}\right]$.

Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^3 - x^2\right) = 4 > 0$ et $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)^2 = 0^+$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<2}} f(x) = +\infty$.

Le graphe de f est à la page suivante.

Graphe de la fonction f.



2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2} &= \frac{(ax+b)\left(x^2 - 4x + 4\right) + c(x-2) + d}{(x-2)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (b-4a)x^2 + (c - 4b + 4a)x + d - 2c + 4b}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}\\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ ax^3 + (b-4a)x^2 + (c-4b+4a)x + d - 2c + 4b = x^3 - x^2\\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ax^3 + (b-4a)x^2 + (c-4b+4a)x + d - 2c + 4b = x^3 - x^2\\
&\qquad\qquad \text{(polynômes coïncidant en une infinité de valeurs)}\\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b - 4a = -1 \text{ et } c - 4b + 4a = 0 \text{ et } d - 2c + 4b = 0\\
&\qquad\qquad \text{(par identification des coefficients)}\\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = 3 \text{ et } c = 8 \text{ et } d = 4.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ f(x) = x + 3 + \frac{8}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}.$$

3. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que fraction rationnelle définie sur $[0,1]$. Donc, l'intégrale I existe. De plus,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(x + 3 + \frac{8}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 8\ln|x-2| - \frac{4}{x-2}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) + 3 + 8(\ln(1) - \ln(2)) - 4\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2} - 8\ln(2)
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ puis $\left(1+x^2\right)^n > 0$. La fonction f_n est donc définie sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour tout réel x, $f_n(x) = n\ln\left(1+x^2\right)$. D'autre part, la fonction f_n est paire.

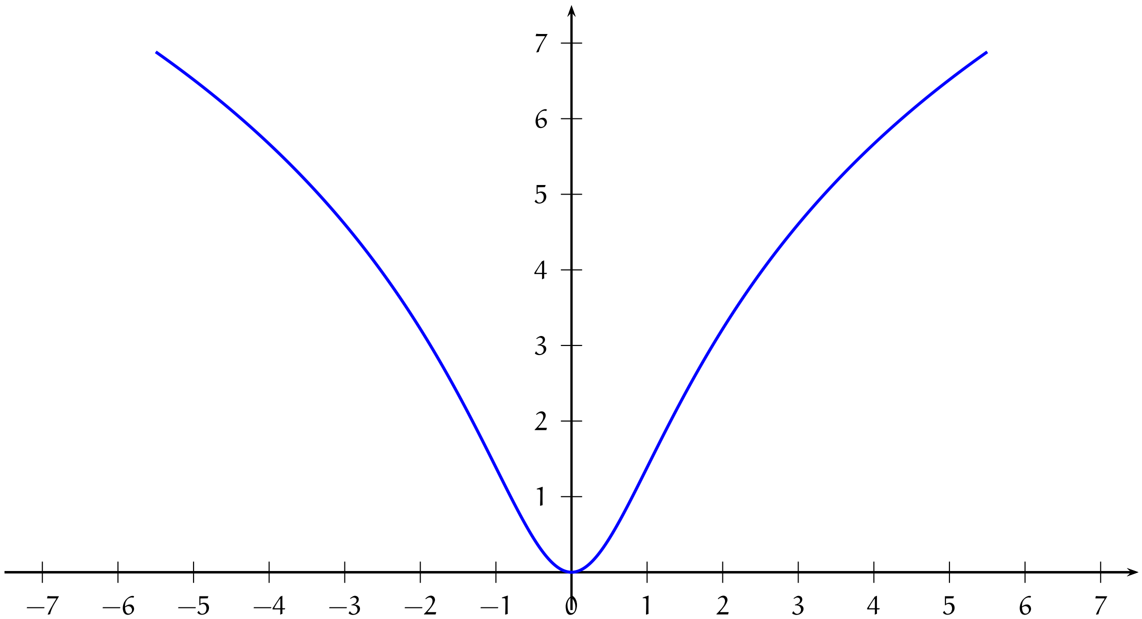
Ensuite, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_n'(x) = \dfrac{2nx}{1+x^2}$. La fonction f_n' est strictement négative sur $]-\infty,0[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$ puis la fonction f_n est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

La fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_n''(x) = 2n\frac{1\times\left(1+x^2\right) - x(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2n\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

La fonction f_n'' est négative sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ et positive sur $[-1,1]$. On en déduit que la fonction f_n est concave sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ et convexe sur $[-1,1]$. De plus, la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion, à savoir les points de coordonnées respectives $(-1, n\ln(2))$ et $(1, n\ln(2))$.

Graphe de la fonction f_n. (voir page suivante)



2. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,dx = \left[x\times\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln(2) - 2\left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) = \ln(2) - 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2. \end{aligned}$$

3. Soit $n \geqslant 1$. Puisque $f_n = nf_1$, $I_n = nI_1 = n\left(\ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2\right)$.

4. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et $x_n > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f_1(x) - x = \ln\left(1+x^2\right) - x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

La fonction g' est strictement négative sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et en particulier sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ et donc la fonction g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Mais alors, pour tout réel strictement positif x, $g(x) < g(0) = 0$. Ainsi, la fonction g est strictement négative sur $]0,+\infty[$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en tenant compte de $x_n > 0$,

$$x_{n+1} - x_n = g\left(x_n\right) < 0.$$

La suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

La suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f_1\left(x_n\right)$. Par continuité de la fonction f_1 sur $[0,+\infty[$ et donc en ℓ, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = f_1(\ell)$ ou encore $g(\ell) = 0$. Puisque pour $x > 0$, on a $g(x) < 0$ et en particulier $g(x) \neq 0$. On en déduit que $\ell = 0$ et donc la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 3

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ puis $z = x + iy$.

$$|z+1| = 1 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+1| = 1$ est le cercle de centre $\Omega(-1,0)$ et de rayon 1.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$|2z+1|=1 \Leftrightarrow 2\left|z+\frac{1}{2}\right|=1 \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|2z+1|=1$ est le cercle de centre $\Omega'\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $\alpha_n>0$,

$$|\alpha_n z_n+1|=1 \Leftrightarrow \alpha_n\left|z_n+\frac{1}{\alpha_n}\right|=1 \Leftrightarrow \left|z_n+\frac{1}{\alpha_n}\right|=\frac{1}{\alpha_n}.$$

Ensuite,

$$|z_n|=\left|z_n+\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\alpha_n}\right|\leqslant\left|z_n+\frac{1}{\alpha_n}\right|+\frac{1}{\alpha_n}=\frac{2}{\alpha_n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$, on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\alpha_n}=0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$.

Exercice 4

1. Si la première balle tombe dans la case au centre du carré, il reste $C_8^2=\frac{8\times 7}{2}=28$ possibilités, toutes équiprobables, de choix de deux cases pour les deux dernières boules (en supposant que deux boules ne puissent pas se retrouver dans une même case).

Parmi ces 28 possibilités, il y en a 4 fournissant un alignement. La probabilité demandée est $\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$.

2. Si la première balle tombe dans un coin du carré (en haut à gauche par exemple), il y a 3 des 28 possibilités qui sont gagnantes. La probabilité demandée est $\frac{3}{28}$.

3. Il n'y en a plus que 2 si la première balle tombe dans une case au milieu d'un côté et donc la probabilité demandée est $\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$.

4. La probabilité que la première balle tombe au centre est $\frac{1}{9}$. La probabilité que la première balle tombe dans un coin est $\frac{4}{9}$ et la probabilité que la première balle tombe au milieu d'un côté est $\frac{4}{9}$.D'après la formule des probabilités totales, la probabilité demandée est :

$$p=\frac{1}{9}\times\frac{4}{28}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{28}+\frac{4}{9}\times\frac{2}{28}=\frac{1}{9\times 28}\times 24=\frac{2}{3\times 7}=\frac{2}{21}.$$

Exercice 5

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $x_n=\frac{1}{n}$ et $y_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels, convergentes, de limite nulle. Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(x_n)=\sin(n\pi)=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=0$ puis, pôur tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(y_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)=1$.

Ainsi, on a trouvé deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant vers 0 telles que les suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes. Ceci montre que la fonction f n'a pas de limite en 0.

2. La fonction $x\mapsto\frac{\pi}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $y\mapsto\sin(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et il en est de même de la fonction g.

Ensuite, pour $x\in\mathbb{R}^*$, $|g(x)|=|x|\times\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\leqslant|x|$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}g(x)=0=g(0)$. La fonction g est donc continue en 0 et finalement,

la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x,

$$g'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Etudions maintenant la dérivabilité de la fonction g en 0. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

D'après la question 1), ce taux n'a pas de limite quand x tend vers 0 et donc la fonction g n'est pas dérivable en 0.

3. Posons $D = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Explicitons la fonction h : si x est dans $\mathbb{R} \setminus D$, $h(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\sin(x)$ et si $x \in D$, alors $h(x) = 0$.

La fonction h est déjà continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ en vertu de théorèmes généraux. Ensuite, pour tout réel x élément de $\mathbb{R} \setminus D$,

$$|h(x)| = |x|\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right||\sin(x)| \leqslant |x|,$$

ce qui reste vrai si $x \in D$ car dans ce cas, $h(x) = 0$. Ceci montre, comme à la question 2) que la fonction h est continue en 0.

Etudions maintenant la continuité en $\frac{1}{k}$ où k est un entier relatif non nul donné. Pour x au voisinage de $\frac{1}{k}$ et distinct de $\frac{1}{k}$,

$$|h(x)| = |x|\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right||\sin(x)| \leqslant |x|\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right||.$$

Quand x tend vers $\frac{1}{k}$, $|x|\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right||$ tend vers $\frac{1}{|k|}|\sin(k\pi)| = 0$. Donc, $h(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\frac{1}{k}$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{k} \\ x \neq \frac{1}{k}}} h(x) = 0 = h\left(\frac{1}{k}\right)$ et donc la fonction h est continue en $\frac{1}{k}$.

Finalement, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout réel x, non dans D,

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\sin(x)$$

et pour $x \in D \setminus \{0\}$, $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0$. Mais alors, pour tout réel non nul x, $\left|\frac{h(x) - h(0)}{x - 0}\right| \leqslant |\sin(x)|$. Puisque $|\sin(x)|$ tend vers 0 quand x tend vers 0, il en est de même du taux $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$. Ceci montre que la fonction h est dérivable en 0 et que $h'(0) = 0$.

Exercice 6

1. Etudions d'abord la fonction f sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$. f est dérivable sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ et pour tout réel $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$,

$$f'(x) = 2(1 + x)e^{-x} - (1 + x)^2e^{-x} = \left(-x^2 + 1\right)e^{-x}.$$

La fonction f' est strictement négative sur $\left]1, \frac{3}{2}\right]$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$. On en déduit que pour tout x de $\left]1, \frac{3}{2}\right]$, $f\left(\frac{3}{2}\right) \leqslant f(x) < f(1)$. Ensuite, $f(1) = 4e^{-1} \leqslant 4 \times 0,369 = 1,476 \leqslant 1,5$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4} \times e^{-\frac{3}{2}} \geqslant 6,25 \times 0,222 > 1$.

Finalement, pour tout réel x de $\left]1, \frac{3}{2}\right]$, on a $f(x) \in \left]1, \frac{3}{2}\right]$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leqslant \frac{3}{2}$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $1 < u_n \leqslant \frac{3}{2}$. Alors, $1 < f(u_n) \leqslant \frac{3}{2}$ ou encore $1 < u_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

2. Pour tout réel $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, $f'(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-x}$ puis $f''(x) = -2xe^{-x} - \left(1 - x^2\right) e^{-x} = \left(x^2 - 2x - 1\right) e^{-x} = \left((x-1)^2 - 2\right) e^{-x}$.
La fonction f'' est négative sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ et donc la fonction f' est décroissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ puis la fonction $|f'|$ est croissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ (car la fonction f' est négative sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$). On en déduit que pour tout réel $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$

$$|f'(x)| \leqslant \left|f'\left(\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{4}e^{-\frac{3}{2}} \leqslant 1,25 \times 0,224 = 0,28 \leqslant \frac{1}{2}.$$

3. Pour $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ et pour tout réel x de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, $g'(x) = f'(x) - 1$.
Mais alors, pour tout réel x de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$,

$$g'(x) \leqslant |f'(x)| - 1 \leqslant \frac{1}{2} - 1 < 0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$. Ainsi, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ et donc bijective de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ sur $g\left(\left[1, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[g\left(\frac{3}{2}\right), g(1)\right]$. De plus, d'après la question 1), $g(1) = f(1) - 1 \geqslant 0$ et $g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \leqslant 0$. Donc, $0 \in g\left(\left[1, \frac{3}{2}\right]\right)$ puis il existe un réel x_0 de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ et un seul tel que $g(x_0) = 0$ ou encore tel que $f(x_0) = x_0$.

4. D'après l'inégalité des accroissements finis et la question 2), pour tout réel x de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}|x - x_0|.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - x_0| = |f(u_n) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - x_0|.$$

Mais alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - x_0|$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}|u_0 - x_0| = 0$, le théorème des gendarmes montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$.

